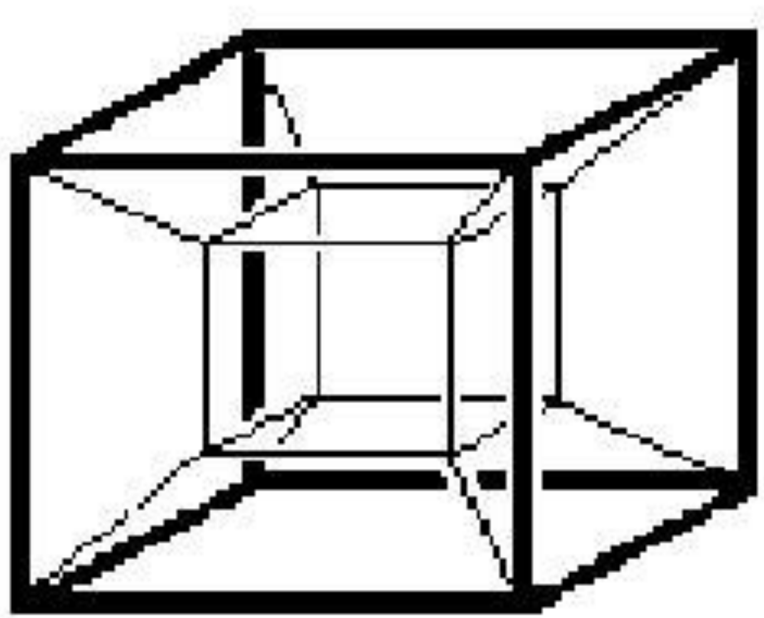
Graf Teorisi
(Graph Theory)

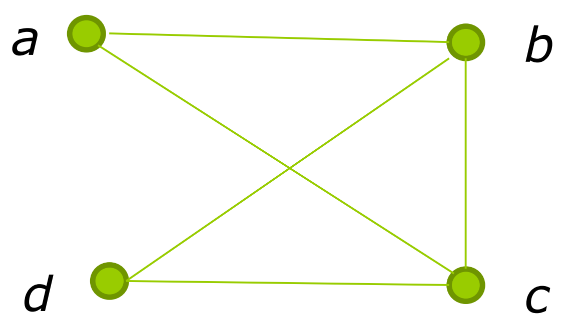


Graf – Çizge

Tanım: Bir G = (V, E) grafı, boş olmayan bir dizi V köşesinden (veya düğümlerden) ve bir dizi E kenarından oluşur. Her kenarın uç noktaları adı verilen, kendisiyle ilişkili bir veya iki köşesi vardır. Bir kenar, graftaki bu köşeleri birbirine bağlayan ve iki köşe arasında bir ilişkiyi gösteren elemandır.

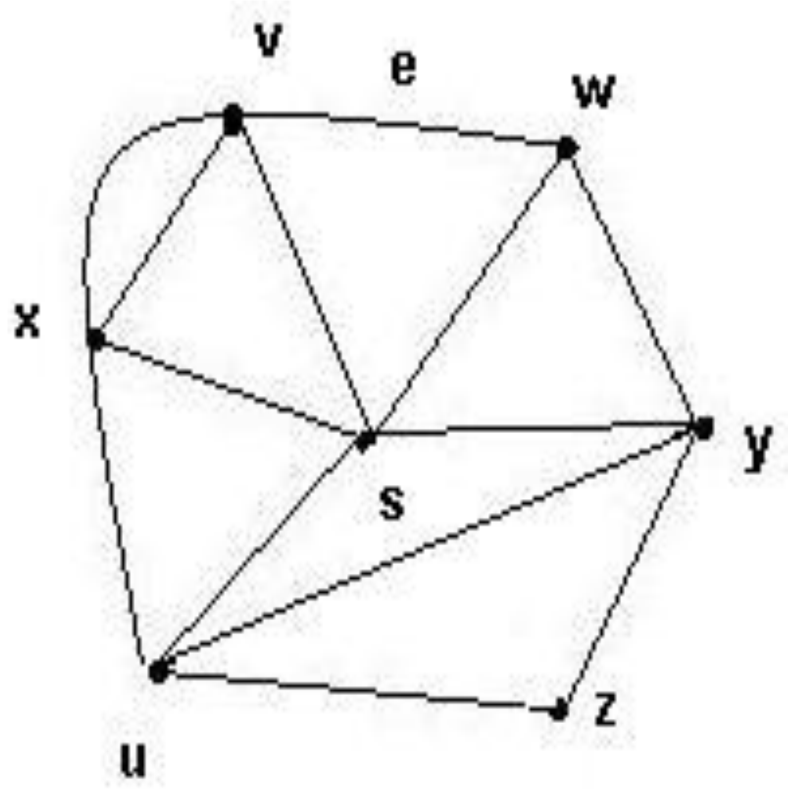
Örnek:

Dört köşeli ve beş kenarlı bir graf



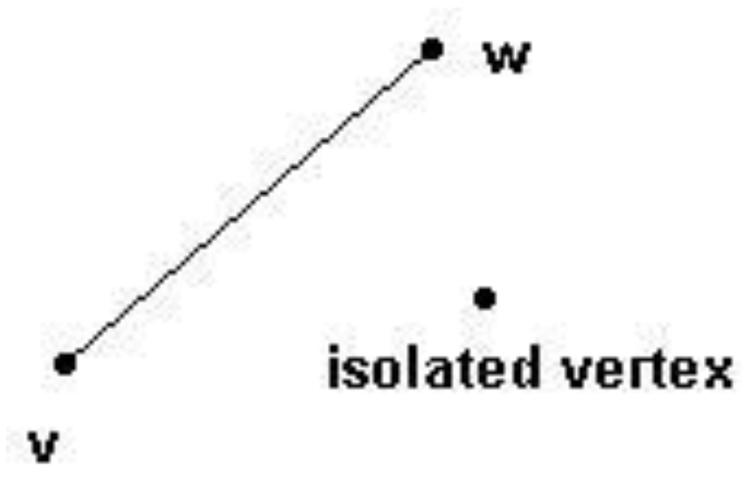
Giriş

- G grafı nedir ?
- G = (V, E)
  - V = V(G) = düğümler kümesi
  - E = E(G) = kenarlar kümesi
- **Örnek:**
  - V = {s, u, v, w, x, y, z}
  - E = {(x,s), $(x,v)_1$, $(x,v)_2$, (x,u), (v,w), (s,v), (s,u), (s,w), (s,y), (w,y), (u,y), (u,z),(y,z)}



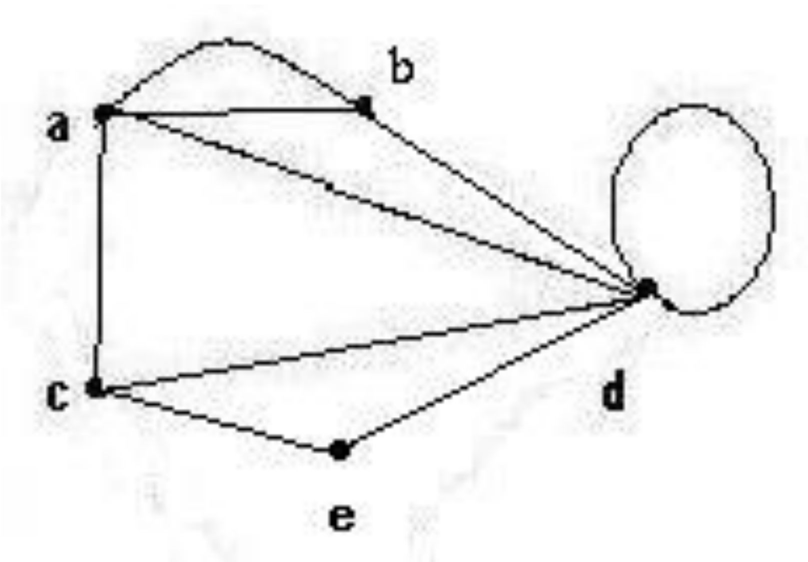
Kenarlar (Edges)

- Kenar bir çift düğüm ile etiketlenmiş olup
  e = (v,w) şeklinde gösterilir.
- Ayrık düğüm (Isolated vertex) = a
  kenar bağlantısı olmayan düğümdür.



Özel Kenarlar

- Paralel kenarlar(Parallel edges)
  - İki veya daha fazla kenar bir düğüm çifti ile bağlanmıştır.
    - a ve b iki paralel kenar ile birleşmiştir

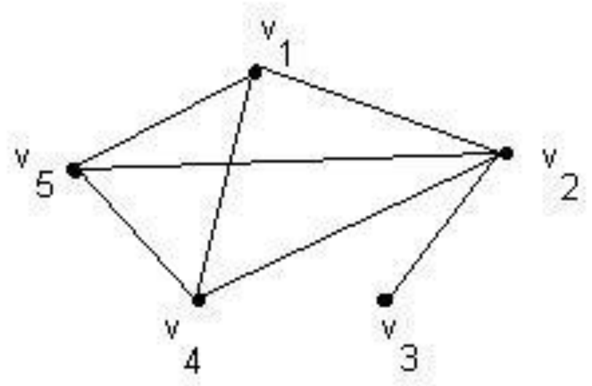


- Döngüler (Loops)
  - Kenarın başlangıç ve bitiş noktası aynı düğümdür.
    - d düğümü gibi.

Özel Graflar

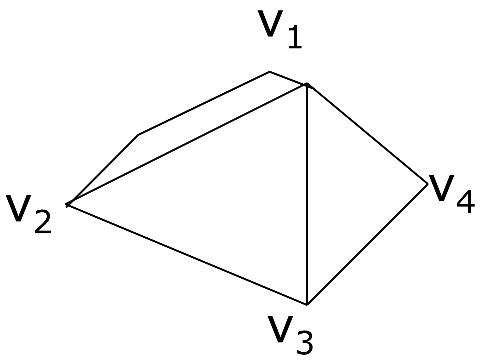
Basit (Simple) Graf

- Yönsüz, paralel kenar olmayan ve döngü içermeyen graflardır.



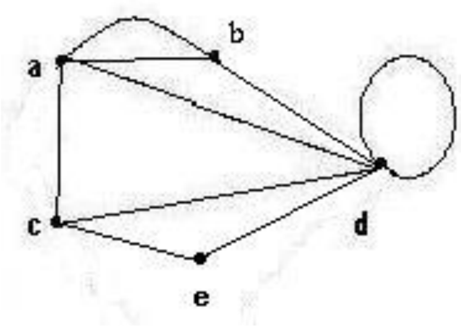
Çoklu (Multi) Graf

- Basit grafların yeterli olmadığı durumlarda kullanılır.
- Yönsüz, paralel kenarı olan ve döngü içermeyen graflardır.



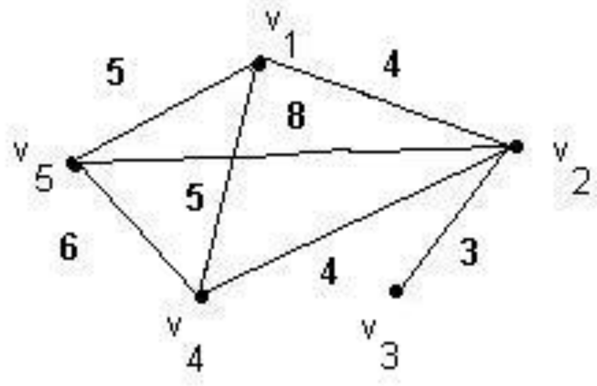
Basit graflar, çoklu graftır fakat çoklu graflar basit garf değildir.

- Pseudo Graflar
  - Çoklu grafların yeterli olmadığı durumlarda kullanılır.
  - Yönsüz, Paralel kenarı olan ve döngü içeren graflardır.
  - Yönsüz grafların en temel halidir.



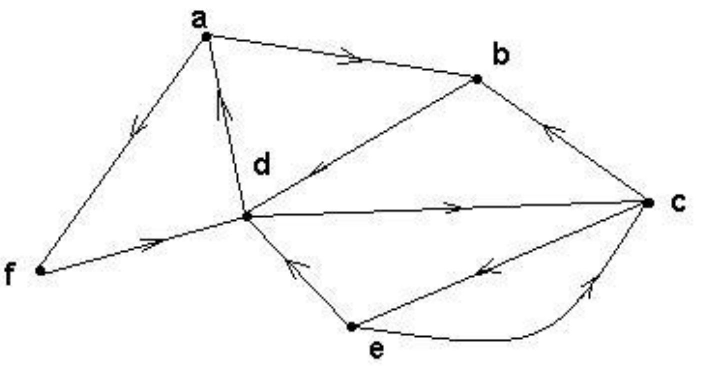
- Ağırlıklı (Weighted) Graf

Her bir kenarına nümerik bir değer, ağırlık verilmiş bir grafdır.



Yönlü (Directed) Graflar (digraphs)

G, yönlü bir graf (*directed) veya digraph* ise her bir kenarı sıralı bir düğüm çifti ile ilişkilendirilmiş ve her kenarı yönlüdür.



Tip	Kenar	Çoklu Kenara İzin ?	Döngüye İzin ?
Basit Graf	Yönsüz	Hayır	Hayır
Çoklu Graf	Yönsüz	Evet	Hayır
Pseudo Graf	Yönsüz	Evet	Evet
Yönlü Graf	Yönlü	Hayır	Evet
Yönlü Çoklu Graf	Yönlü	Evet	Evet

Graflarda Benzerlik (similarity) (1)

Problem: Nesnelerin değişik özellikleri referans alınarak nesneleri sınıflandırabiliriz.

Örnek:

- Bilgisayar programlarında üç ayrı özelliğin olduğunu kabul edelim. k = 1, 2, 3 gibi:
- 1. Programın satır sayısı
- 2. Kullanılan “return” sayısı
- 3. Çağrılan fonksiyon sayısı

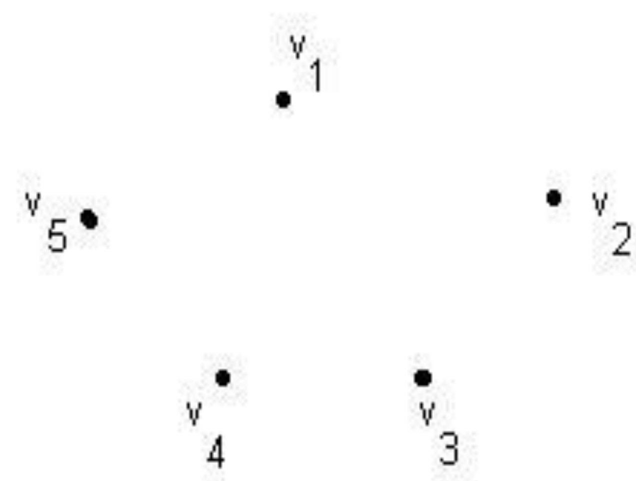
Graflarda benzerlik (2)

Aşağıdaki tabloda 5 programın birbirleriyle karşılaştırıldığını farzedelim.

Program	# of lines	# of “return”	# of function calls
1	66	20	1
2	41	10	2
3	68	5	8
4	90	34	5
5	75	12	14

Graflarda benzerlik (3)

- G grafını aşağıdaki gibi oluşsun:
  - V(G) programlardan oluşan bir küme $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.
  - Her düğüm, v_i bir üçlü ile gösterilir (p_1, p_2, p_3),
  - burada p_k özellik değerleridir k = 1, 2, veya 3
  - $v_1 = (66,20,1)$
  - $v_2 = (41, 10, 2)$
  - $v_3 = (68, 5, 8)$
  - $v_4 = (90, 34, 5)$
  - $v_5 = (75, 12, 14)$



Benzer olmayan fonksiyonlar (1)

- Benzer olmayan (*dissimilarity function)* bir fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.
- Her bir düğüm çifti $v = (p_1, p_2, p_3)$ ve $w = (q_1, q_2, q_3)$ ile gösterilsin.

$$s(v,w) = \sum_{k=1}^{3} |p_k - q_k|$$

- ***v*** ve ***w*** gibi iki programın *dissimilarity* s(v,w) ile ölçülür.
- N seçilen sabit bir sayı olsun. Eğer s(v,w) < N ise ***v*** ve ***w*** arasındaki kenar eklenir. Sonra:
- Eğer v = w veya ***v*** ve ***w*** arasında bir yol varsa ***v*** ve ***w*** nun aynı sınıfta olduğunu söyleyebiliriz.

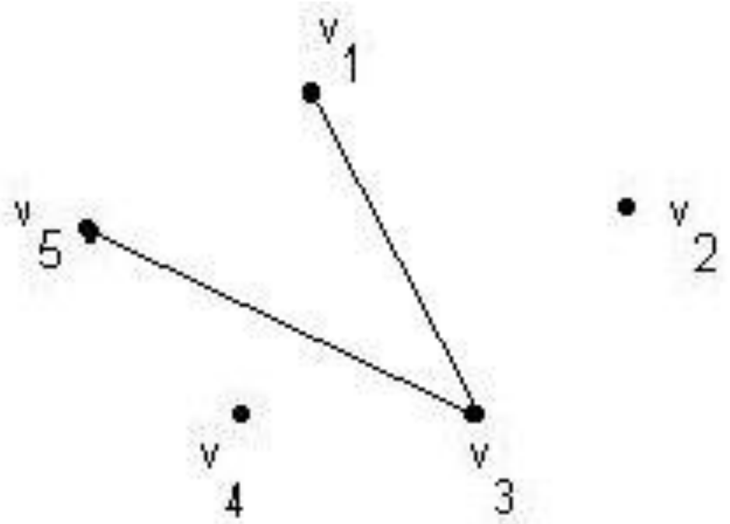
Benzer olmayan fonksiyonlar(2)

- N = 25 (denemeler ile belirleniyor)

$s(v_1,v_2) = 36$	$s(v_2,v_3) = 38$	$s(v_3,v_4) = 54$
$s(v_1,v_3) = 24$	$s(v_2,v_4) = 76$	$s(v_3,v_5) = 20$
$s(v_1,v_4) = 42$	$s(v_2,v_5) = 48$	$s(v_4,v_5) = 46$
$s(v_1,v_5) = 30$		

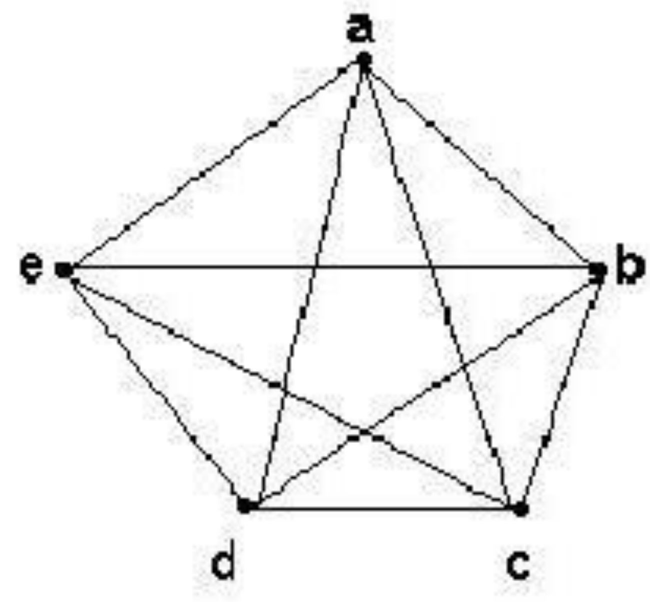
Benzer olmayan fonksiyonlar(2)

- N = 25.
- $s(v_1,v_3) = 24$, $s(v_3,v_5) = 20$ ve diğerleri $s(v_i,v_j) > 25$
- Üç sınıf vardır:
- $\{v_1,v_3, v_5\}$, $\{v_2\}$ and $\{v_4\}$
- ***similarity graph*** şekildeki gibidir.



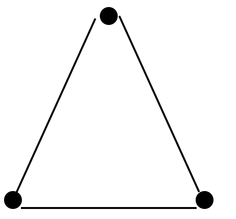
Tam (Complete) Graf K $_n$

- n $\geq$ 3
- *complete graph* K_n : n adet düğüm içeren basit graf yapısındadır. Her düğüm, diğer düğümlere bir kenar ile bağlantılıdır.
- Şekilde K_5 grafı gösterilmiştir.
- Soru: K_3, K_4, K_6 graflarını çiziniz.



Cycles (Çember) Graf C $_n$

- n $\geq$ 3
- *cycles graph* C_n : n adet düğüm ve $\{v_1,v_2\}$, $\{v_2,v_3\}$, ..., $\{v_{n-1},v_n\}$, $\{v_n,v_1\}$, düğüm çiftlerinden oluşan kenarlardan meydana gelir.
- Şekilde C_3 grafı gösterilmiştir.

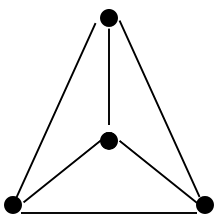


C_3

- Soru: C_4, C_5, C_6 grafların çiziniz.

Wheel (Tekerlek) Graf W $_{\mathbf{n}}$

- *wheel graph W_n* : Cycle C_n grafına ek bir düğüm eklenerek oluşturulur. Eklenen yeni düğüm, diğer bütün düğümlere bağlıdır.
- Şekilde W_3 grafı gösterilmiştir.



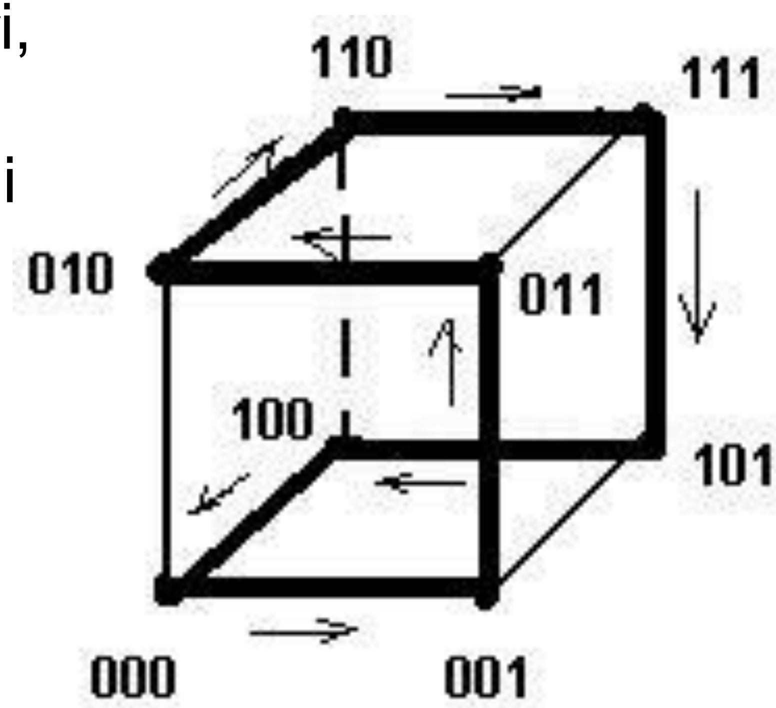
W_3

- Soru: W_4, W_5, W_6 graflarını çiziniz.

N-Cube (Küp) Graf Q_n

- *N-cube Q_n* : Grafın düğüm noktaları n uzunluğunda 2^n bit stringi ile gösterilir. Düğümlerin string değeri, bir düğümden diğerine geçerken aynı anda sadece bir bitin değerini değiştirmektedir.

(000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100, 000)

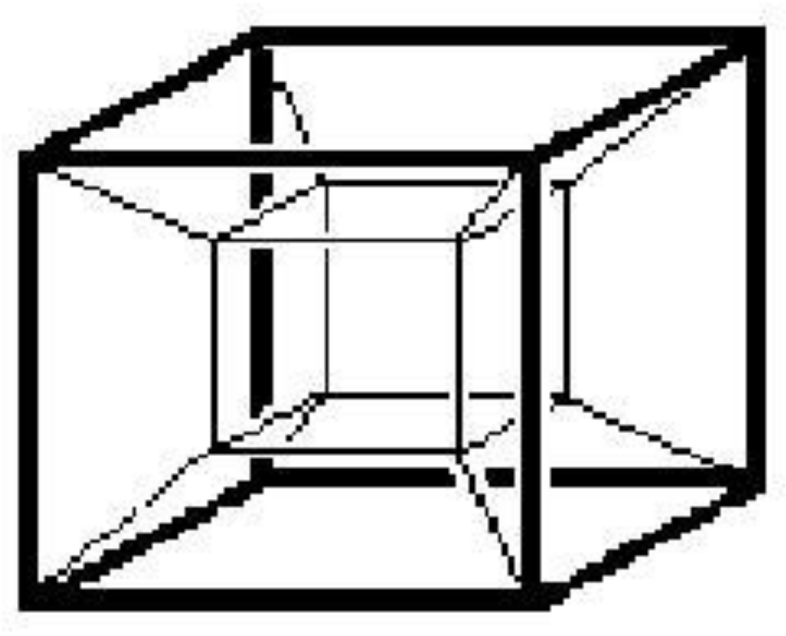


The 3-cube

- Şekilde Q_3 grafı gösterilmiştir.

Soru: Q_1, Q_2 graflarını çiziniz.

hypercube veya 4-cube



16 düğüm, 32 kenar ve 20 yüzey

- Düğüm etiketleri:

0000 0001 0010 0011

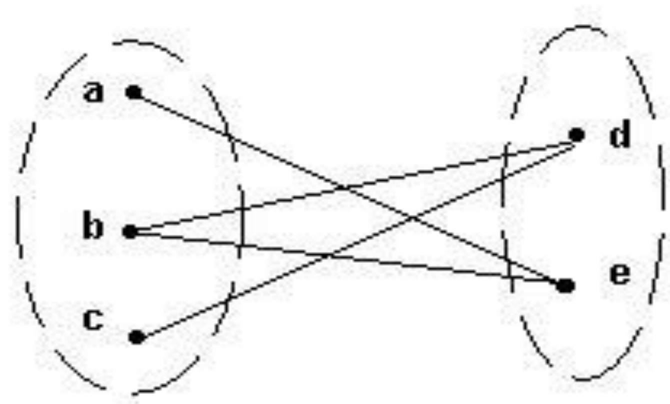
0100 0101 0110 0111

1000 1001 1010 1011

1100 1101 1110 1111

İki Parçalı (Bipartite) Graflar

- G, bipartite graf ise:
  - $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$
  - $|V(G_1)| = m$, $|V(G_2)| = n$
  - $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$



• Bir grafı oluşturan düğümleri iki ayrı kümeye bölerek grafı ikiye ayırabiliriz. Bu ayırma işleminde izlenecek yol; bir kenar ile birbirine bağlanabilecek durumda olan düğümleri aynı küme içerisine yerleştirmemektir.

• Mevcut küme içerisindeki düğümler birbirlerine herhangi bir kenar ile bağlanmamalıdır.

- K_3 Bipartite graf mıdır ?

Hayır

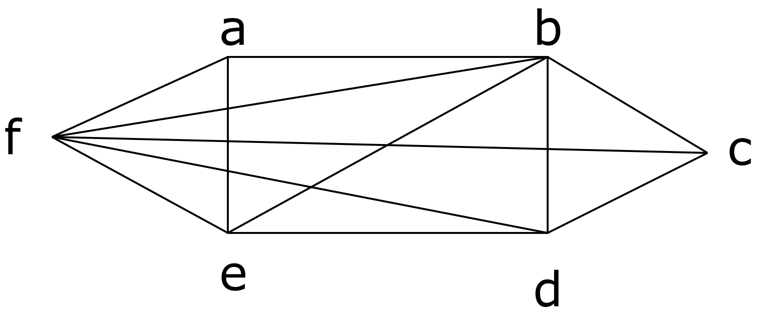
- C_6 Bipartite graf mıdır?

Evet

{1,3,5} ve {2,4,6}

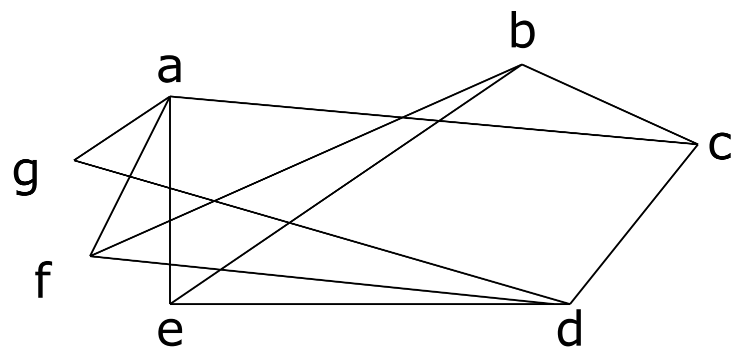
Yandaki graf Bipartite graf mıdır?

Hayır

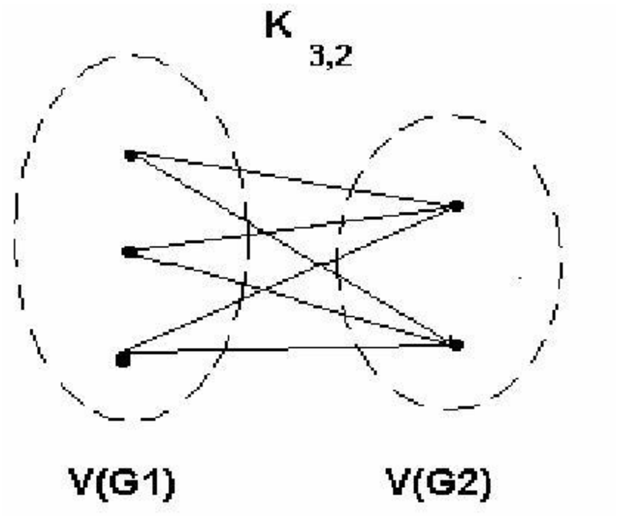


Yandaki graf Bipartite graf mıdır?

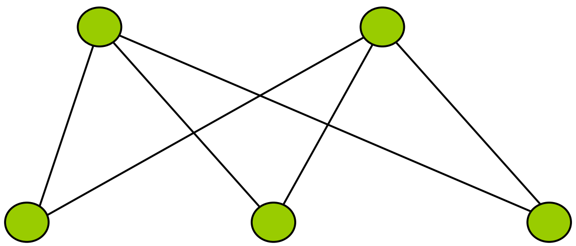
Evet. {a,b,d} ve {c,e,f,g}



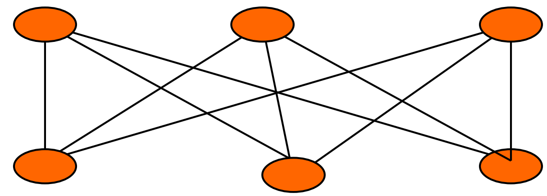
Tam (complete) bipartite graph $K_{\mathbf{m,n}}$



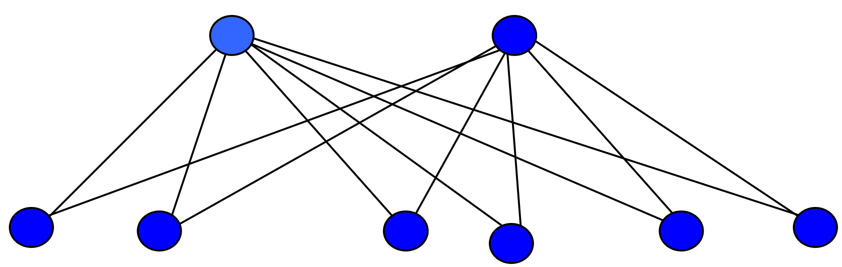
- *complete* bipartite graf $K_{m,n}$ şeklinde gösterilir. İlgili grafın düğümlerinin kümesi m ve n elemanlı iki alt kümeye ayrılır.
- Bir kenarı birbirine bağlayan iki düğümünde farklı alt kümelerin elemanı olmak zorundadırlar.
- $|V(G_1)| = m$
- $|V(G_2)| = n$



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{2,6}$

K_n, C_n, W_n, $K_{m,n}$, Q_n grafların?n kenar ve düğüm sayılarını formüle edecek olursak:

K_n	n düğüm	$n(n-1)/2$ kenar
C_n	n düğüm	n kenar
W_n	n+1 düğüm	2n kenar
$K_{m,n}$	m+n düğüm	m*n kenar
Q_n	2^n düğüm	$n2^{n-1}$ kenar

Yollar (Paths) ve Döngüler(Cycles)

Path (Yol) Bir grafta bir düğümden diğer bir düğüme gidilirken izlenecek düğümlerin tamamına yol (path) denir.

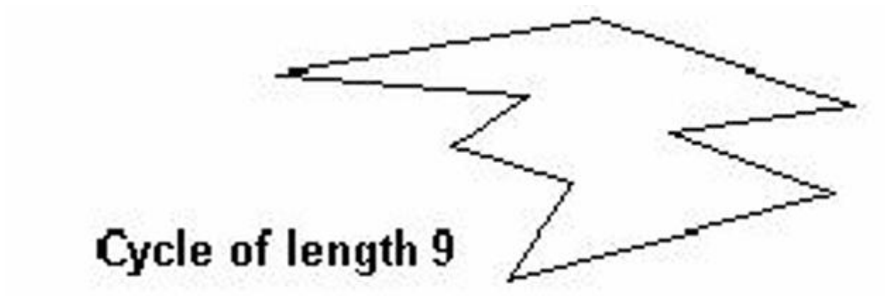
- Eğer basit bir graf söz konusu ise yolun uzunluğu üzerinden geçilen kenar sayısına eşittir.
- Eğer ağırlıklı bir graf söz konusu ise yolun uzunluğu her bir kenarın aldığı değerlerin toplamına eşittir.

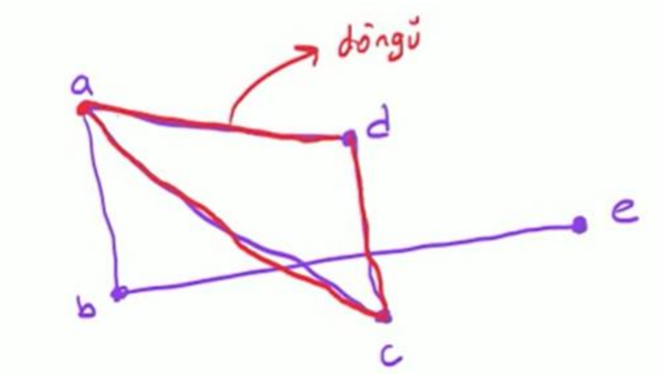

Path of length 7

- **n** uzunluğundaki bir yol’un (path) **n+1** adet düğümü ve n adet de ardışık kenarı vardır

Döngü (Cycle) Başladığı düğüme geri dönen ve aynı düğümden iki kez geçmeyen yola döngü (cycle) denir.

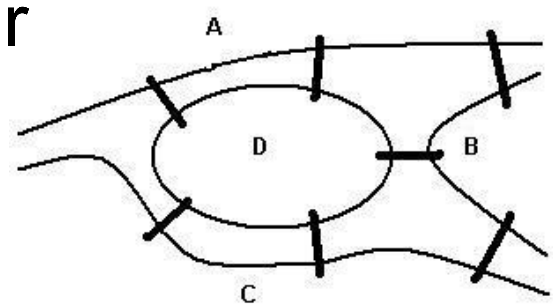
- Bir grafta ki kenar sayısı >= düğüm sayısı ise o grafta en az bir döngü vardır
- Uzunluğu n olan döngüde, n düğüm vardır.



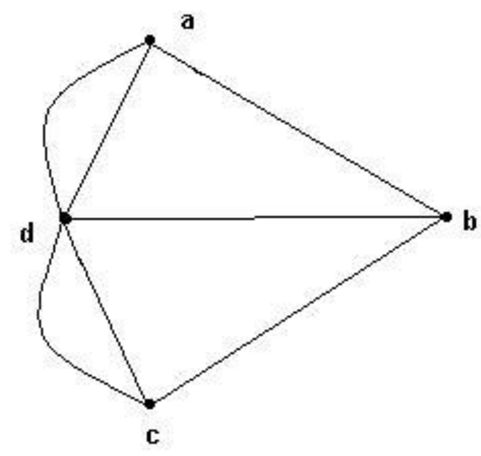


Euler Döngüsü (Euler cycles)

- G grafı içerisindeki *Euler döngüsü* basit bir çevrim olup, G grafı içerisindeki her kenardan sadece bir kez geçilmesine izin verir.



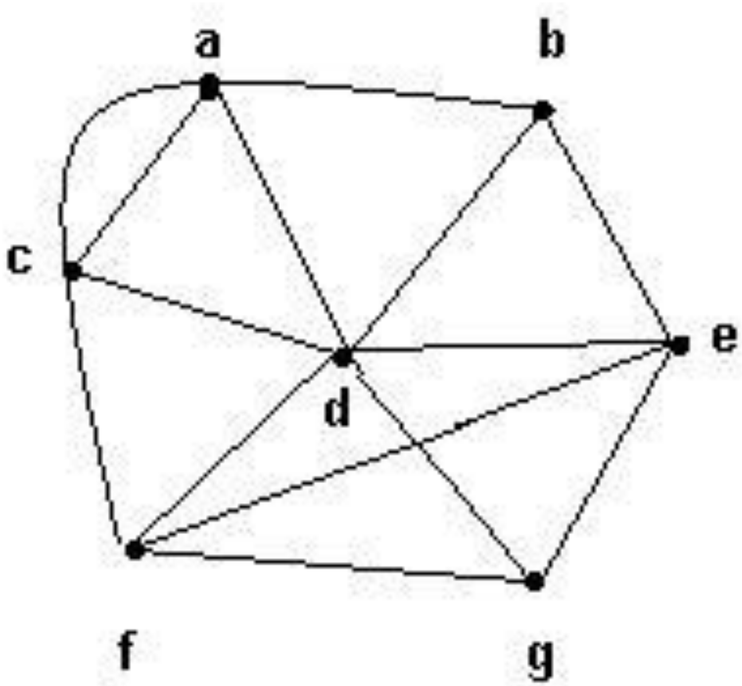
- Königsberg köprü problemi:
  - Yedi köprüden sadece bir kez geçerek başlangıç noktasına dönmek mümkün müdür?



- Bu problemi grafa indirgeyelim.
- Kenarlar köprüleri ve düğüm noktaları da bölgeleri göstersin.

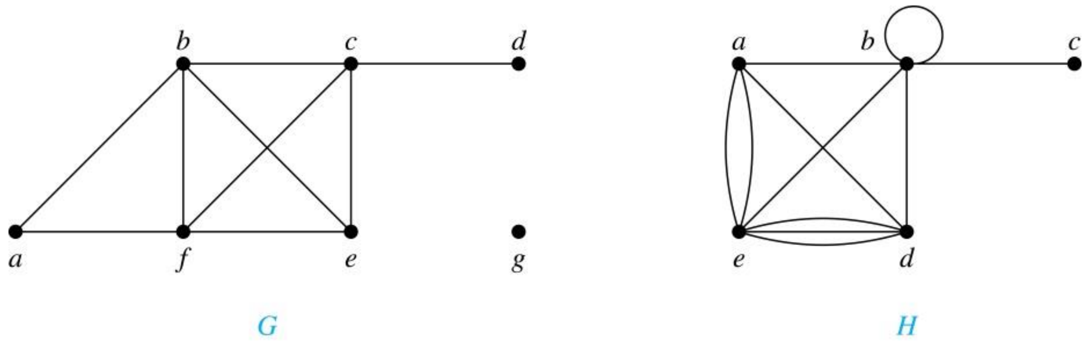
Bir düğümün derecesi

- **v** düğümünün derecesi $\delta(v)$ ile gösterilir ve bu da yönsüz bir grafta düğüme gelen kenarlar toplamıdır. Düğüm noktalarındaki döngü, düğüm derecesine 2 kez katılır.



- **Örnek**:
  - $\delta(a) = 4$, $\delta(b) = 3$,
  - $\delta(c) = 4$, $\delta(d) = 6$,
  - $\delta(e) = 4$, $\delta(f) = 4$,
  - $\delta(g) = 3$.

Örnek: Verilen G ve H graflarındaki düğümlerin dereceleri ve komşuları nedir?



G: $\deg(a) = 2$, $\deg(b) = \deg(c) = \deg(f) = 4$, $\deg(d) = 1$, $\deg(e) = 3$, $\deg(g) = 0$.

$N(a)=\{b, f\}$, $N(b)=\{a, c, e, f\}$, $N(c)=\{b, d, e, f\}$, $N(d)=\{c\}$, $N(e) = \{b, c, f\}$, $N(f) = \{a, b, c, e\}$, $N(g) = \varnothing$.

H: $\deg(a) = 4$, $\deg(b) = \deg(e) = 6$, $\deg(c) = 1$, $\deg(d) = 5$.

$N(a) = \{b, d, e\}$, $N(b) = \{a, b, c, d, e\}$, $N(c) = \{b\}$, $N(d) = \{a, b, e\}$, $N(e) = \{a, b, d\}$.

Euler Yolu (path) ve Euler Döngüsü (cycle)

Euler Yolu (Euler Path) : Yönsüz bir graftaki tüm yollardan bir kez geçmek şartıyla (aynı düğümden birden fazla geçilebilir) tüm düğümleri dolaşan bir yol bulunabiliyorsa bu yola **Euler Yolu** denir.

- ❖ Euler Yolu bulunan grafa yarı Euler graf (semi Euler) denir.

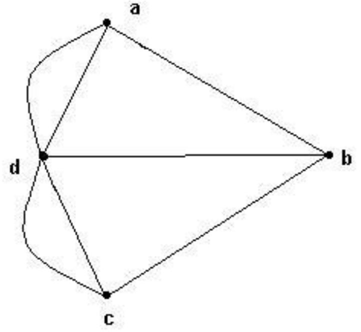
Euler Döngüsü (Euler Cycle) : Euler yolunun başlangıç ve bitiş düğümleri aynı ise bu yola **Euler Döngüsü** denir.

- ❖ Euler döngüsü içeren grafa Euler grafı denir.

- ➢ Yönlü graflarda bu tanımlara yön ifadesi eklenerek yönlü Euler yolu ve yönlü Euler döngüsü adı verilir. Graf üzerinde gezinirken yöne dikkat edilmelidir.
- ➢ Euler döngüsü varsa Euler yolu da vardır. Euler yolu varsa Euler döngüsü olmayabilir.

devam…

- Yönsüz bağlı bir grafın bütün **düğümlerinin dereceleri çift** ise bu graf Euler grafıdır. Hem Euler yolu hem de Euler döngüsü vardır.
- Bir yönsüz grafta Euler yolu bulunabilmesi için **iki veya sıfır sayıda tek düğüm derecesi** bulunmalıdır.
- Yönlü bir grafta ancak ve ancak bütün düğümlerin giren ve çıkan derecelerinin toplamı eşit ise Euler grafı olabilir.
- Konigsberg bridge problemi bir Euler grafı değildir.
- Konigsberg bridge probleminin çözümü yoktur.



Grafın düğüm derecelerinin toplamı

- Sıfır dereceli bir düğüm ***isolated*** olarak adlandırılır. Isolated olan bir düğümden, başka bir düğüme yol yoktur.
- Düğüm derecesi bir olan düğüme ***pendant*** denir.

- **Teorem**: *Handshaking*

e adet kenarlı ve ***n*** adet düğümlü bir grafın G(V,E) düğümlerinin dereceleri toplamı kenar sayısının iki katıdır.

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2e$$

Örnek: Her birinin derecesi 6 olan 10 düğümlü bir grafın kaç tane kenarı vardır.

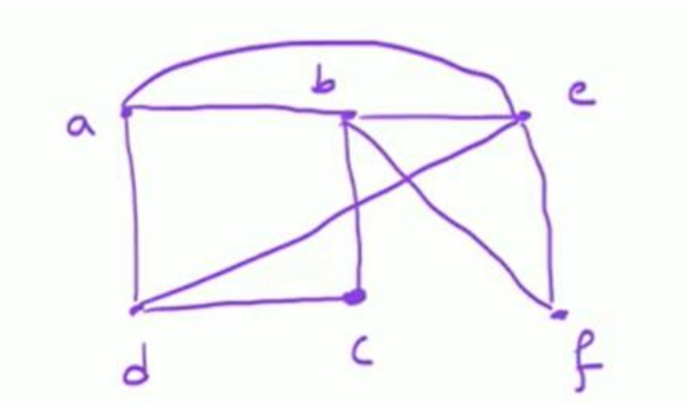
e=30

- G grafında (v,w) yönlü bir kenar olsun ve yön *v*'den *w*'ya verilsin. *v* ***initial vertex***, *w*'da ***terminal*** veya ***end vertex*** olarak adlandırılır. Bir düğüm noktasında döngü söz konusu ise bu düğümün *initial vertex*'i ve *end vertex*'i birbirinin aynıdır.

- Yönlü bir grafta, herhangi bir düğümün ***in_degree'***si $\delta^-(v)$, ***out_degree'***si $\delta^+(v)$ olarak gösterilir.

- Yönlü bir grafın in_degree ve out_degree'lerinin toplamı birbirinin aynıdır.

$$\sum_{v \in V} \delta^-(v) = \sum_{w \in V} \delta^+(v)$$

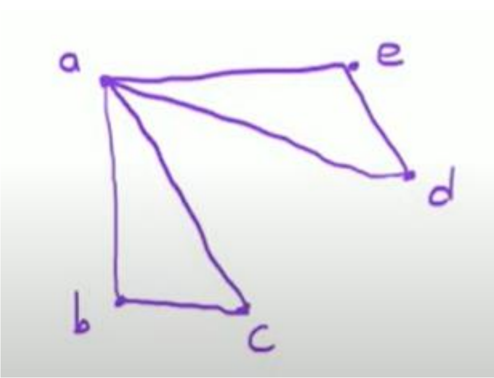


Örnek: Verilen graf Euler yolu ve döngüsüne sahip midir?

a → 3 b→ 4 c →2 d → 3 e→ 4 f → 2

- Tüm dereceler çift olmadığı için **Euler döngüsü yoktur.**
- İki tane düğümün derecesi tek diğer düğümlerin dereceleri çift olduğu için **Euler yolu vardır.**

Euler Döngülerinin Sayısı Nasıl Bulunur?



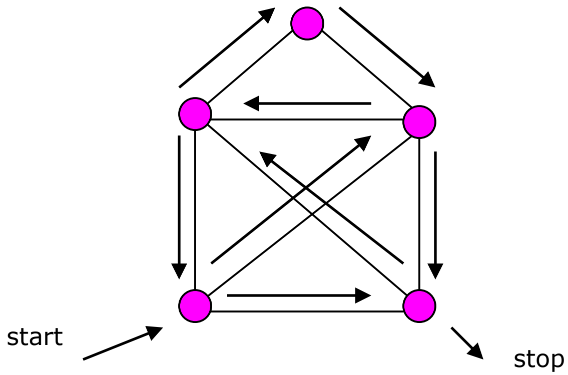
a → 4 b→ 2 c →2 d → 2 e→ 2

- ✓ Euler yolu var
- ✓ Euler döngüsü var

Bütün düğüm derecelerinin bir eksiğinin faktöreyellerinin çarpımı Euler döngü sayısını verir.

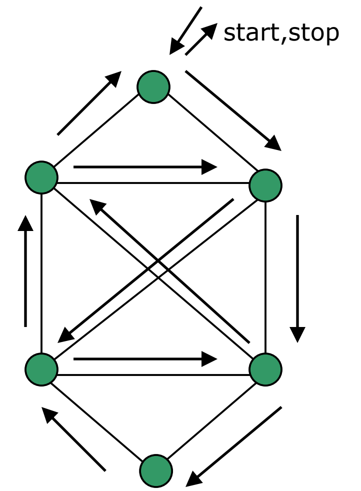
3!*1!*1!*1!*1!= 6 farklı Euler döngüsü vardır

Örnek: Aşağıda verilmiş olan graflardan hangilerinde her kenardan en az bir kez geçirilerek graf gezilmiştir, hangileri Euler grafıdır, eğer değilse sebebi nedir ?

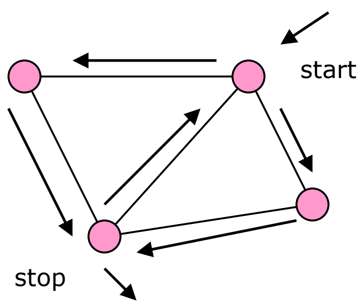


Euler yolu var, Euler grafı değil

Düğüm dereceleri çift değil

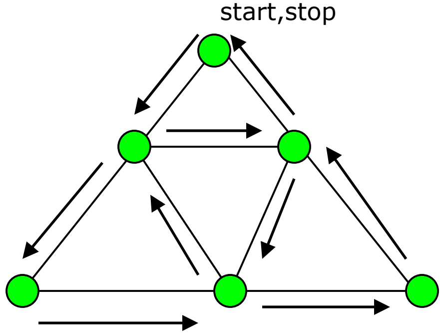


Euler grafı



Euler yolu var, Euler grafı değil

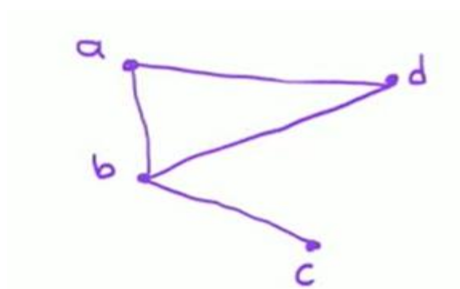
Düğüm dereceleri çift değil

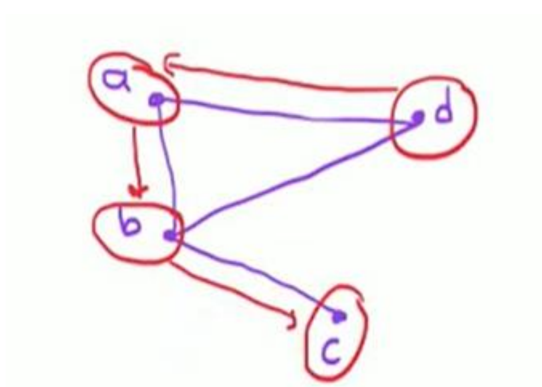


Euler grafı

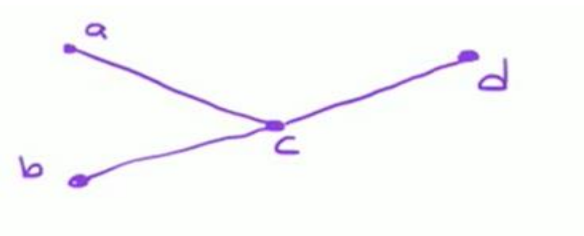
Hamilton Yolu, Döngüsü, Grafı

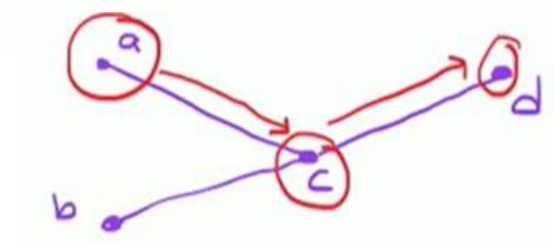
Hamilton Yolu : Eğer bağlı bir grafta bütün düğümlerden geçen ve bir yoldan sadece bir kez geçmek kaydıyla bir yol varsa buna **Hamilton yolu** denir. Her yoldan geçmek zorunluluğu yoktur.





dabc şeklinde Hamilton yolu vardır

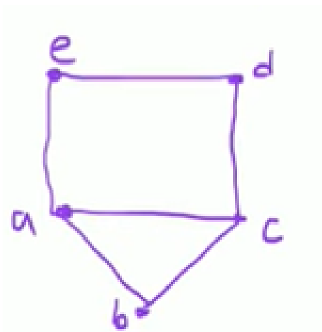


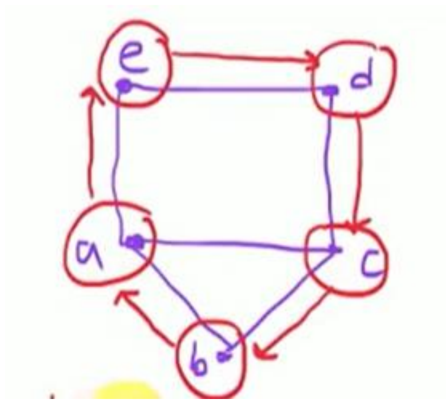


Hamilton yolu yoktur.

devam…

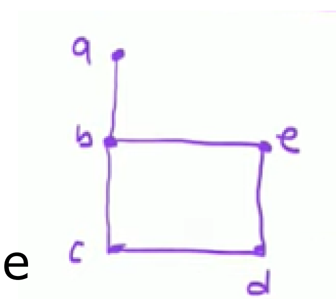
Hamilton Döngüsü : Eğer bağlı bir grafta bütün düğümlerden bir kez geçerek (başlangıç düğümü hariç) ve bir yoldan sadece bir kez geçmek kaydıyla başladığımız düğüme dönen bir yol varsa buna **Hamilton döngüsü** denir. Her yoldan geçmek zorunluluğu yoktur.

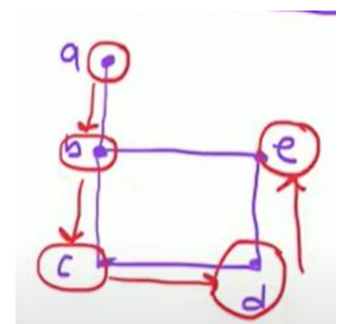




aedcba Hamilton döngüsü var

Hamilton döngüsü yoktur.
Hamilton yolu vardır. abcde



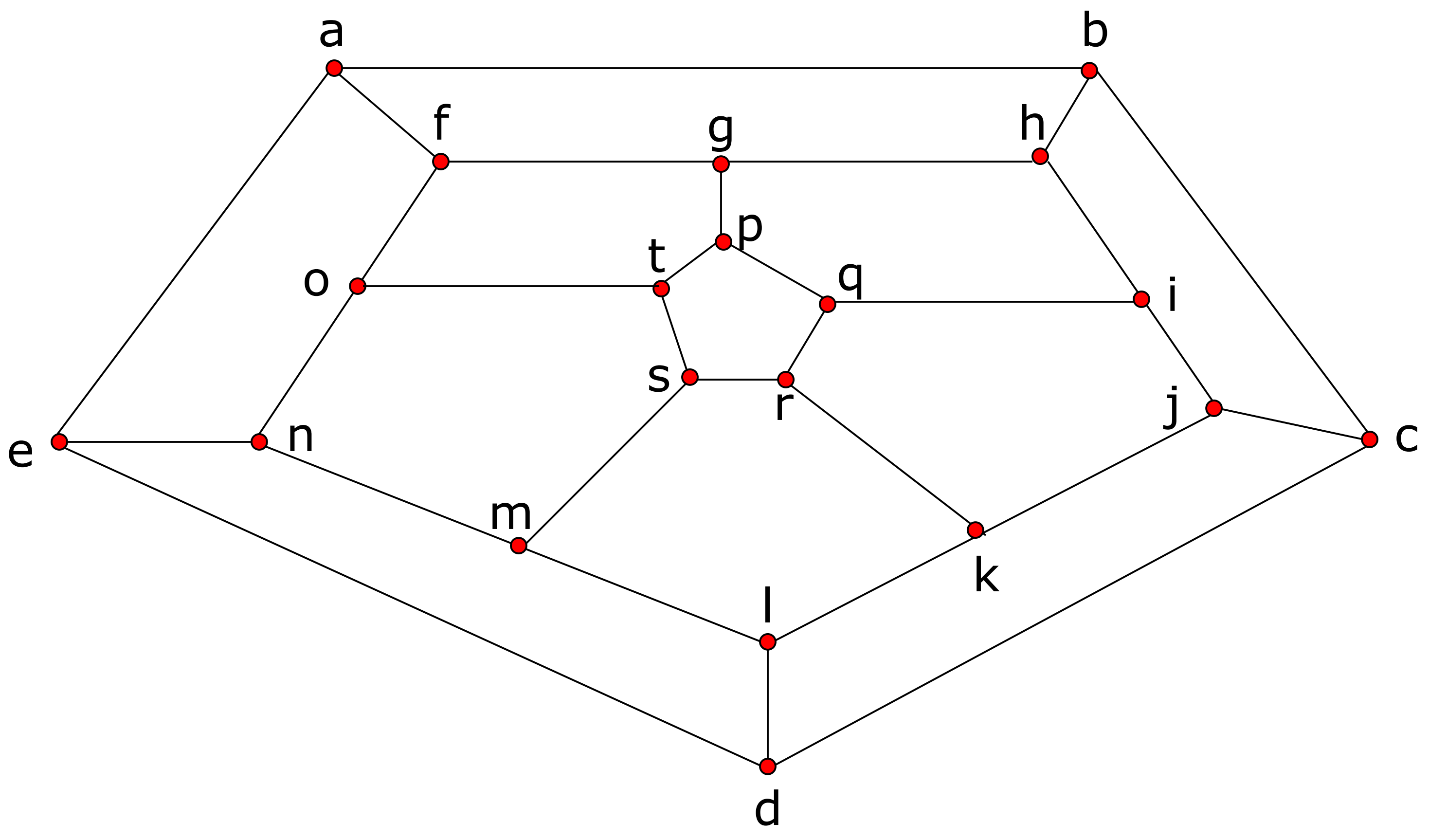


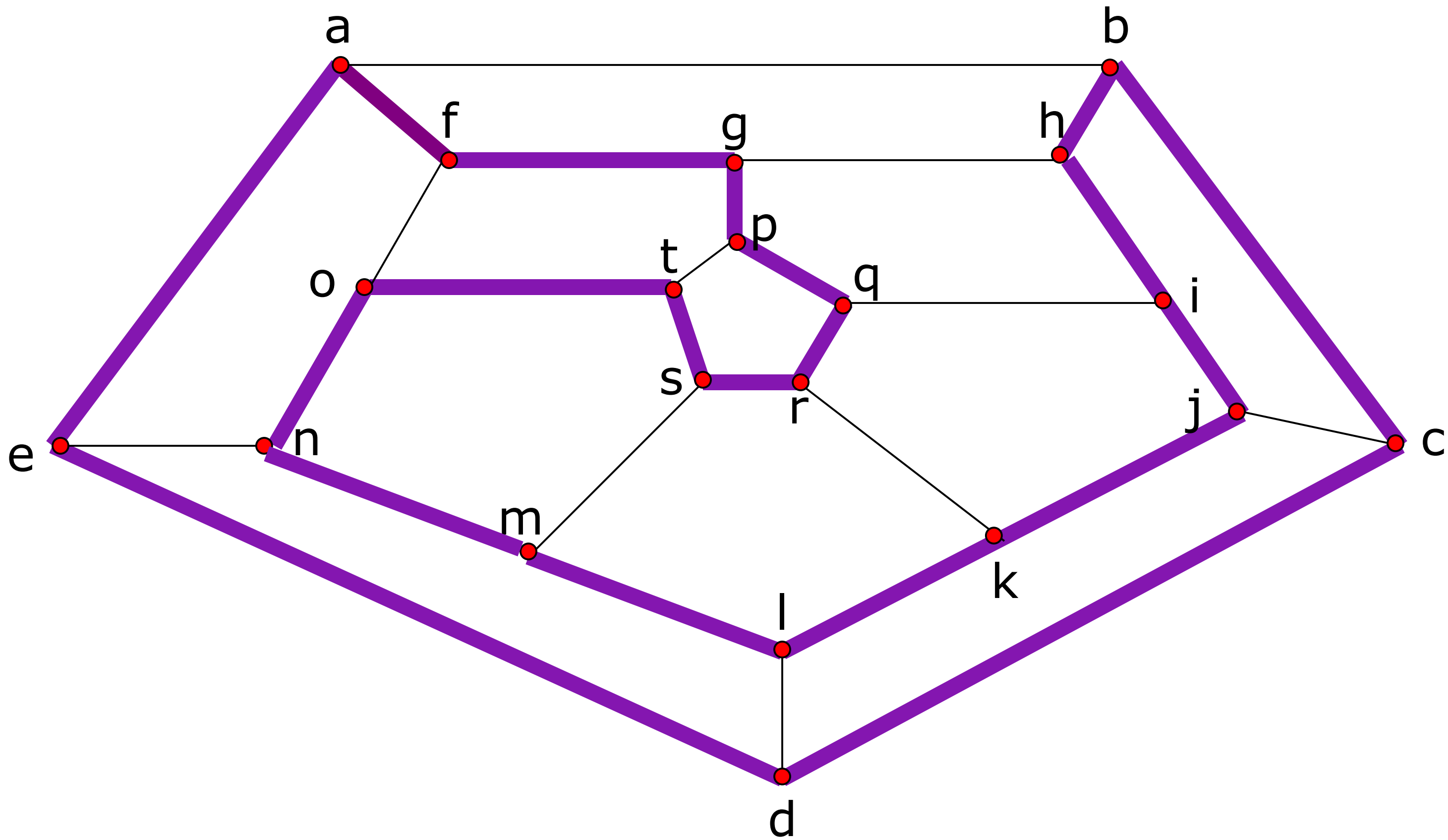
devam…

Hamilton Graf : Hamilton döngüsü içeren grafa Hamilton Grafı denir.

- Hamilton döngüsüne sahip bir graftan bir kenar çıkarılarak Hamilton yoluna çevrilebilir.
- Hamilton döngüsü içeren her graf Hamilton yolu içerir.
- Birden fazla Hamilton yolu ve döngüsü aynı grafta bulunabilir.

Örnek : Hamilton graf mıdır?

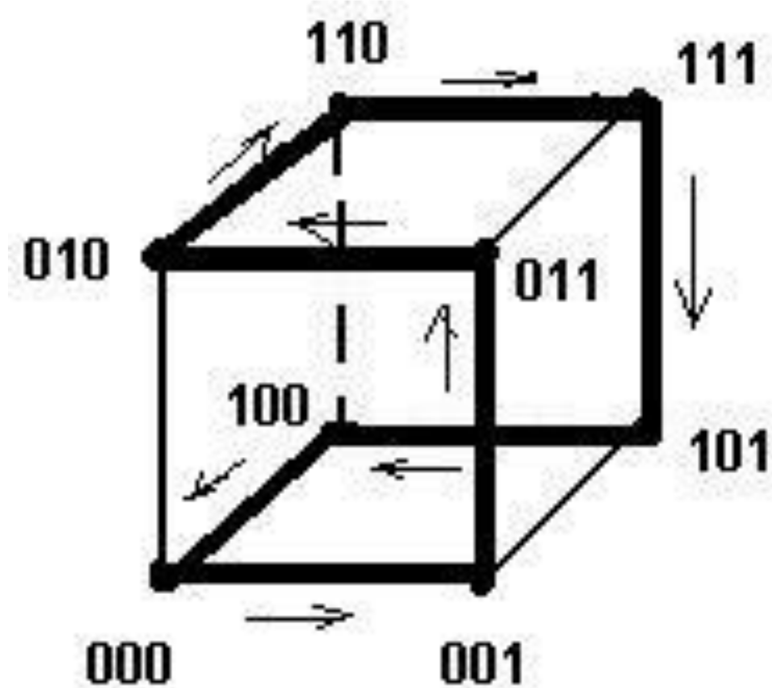




a
b
f
g
h
p
t
q
o
i
s
r
j
e
n
c
m
k
l
d

3-cube

Hamiltonian cycle (000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100, 000) örnek bir graf 3-cube olarak verilebilir.



The 3-cube

Grafların Temsil Edilmesi

- Komşuluk Listesi (Adjacency Lists)
- Komşuluk Matrisi (Adjacency Matrices)
- İlişki Matrisi (Incidence Matrices)

Komşuluk Listesi (Adjacency Lists)

Tanım: Yönsüz bir grafta her bir düğüme komşu olan düğümlerin veya yönlü olan bir grafta her düğümden çıkan kenarların bağlandığı düğümlerin listesini çıkarmak için kullanılır.

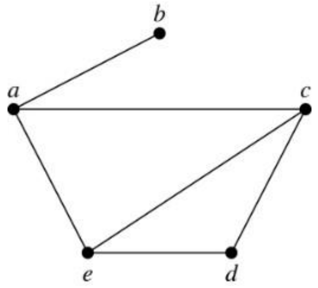
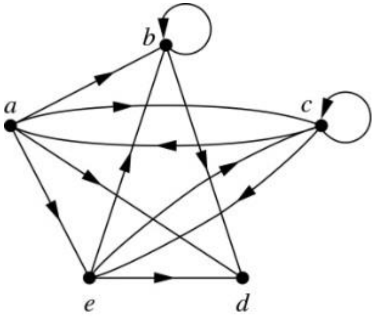


TABLE 1 An Adjacency List for a Simple Graph.

Vertex	*Adjacent Vertices*
a	*b*, *c*, *e*
b	*a*
c	*a*, *d*, *e*
d	*c*, *e*
e	*a*, *c*, *d*

TABLE 2 An Adjacency List for a Directed Graph.

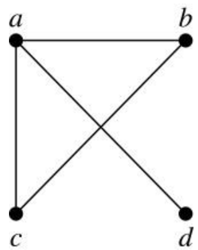
Initial Vertex	*Terminal Vertices*
a	*b*, *c*, *d*, *e*
b	*b*, *d*
c	*a*, *c*, *e*
d	
e	*b*, *c*, *d*



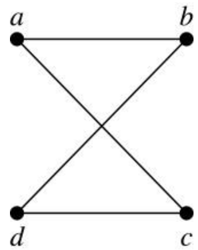
Komşuluk Matrisi (Adjacency Matrice)

Tanım: Bir grafın komşuluk matrisi $\mathbf{A}_G = [a_{ij}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \{v_i, v_j\} \text{ is an edge of } G, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



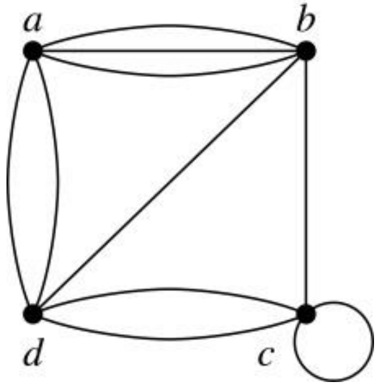
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Not: Bir graf seyrek olduğunda, yani sahip olduğu kenar sayısı toplam olası kenar sayısına göre çok az ise, bu grafı komşuluk listesi kullanarak temsil etmek komşuluk matrisinden çok daha verimlidir.

(*devam…*)



$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

İlişki Matrisi (Incidence Matrice)

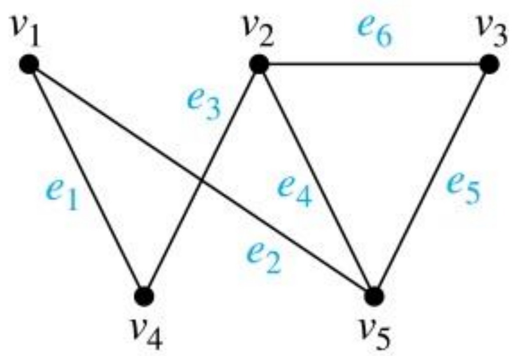
Tanım: G = (V, E), düğümleri v1, v2, ... vn ve kenarları e1, e2, ... em olan yönsüz bir graf olsun. v ve e'nin sıralamasına göre ilişki matrisi n × m boyutlu olup, M = [mij]

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{when edge } e_j \text{ is incident with } v_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

olsun.

(*devam…*)

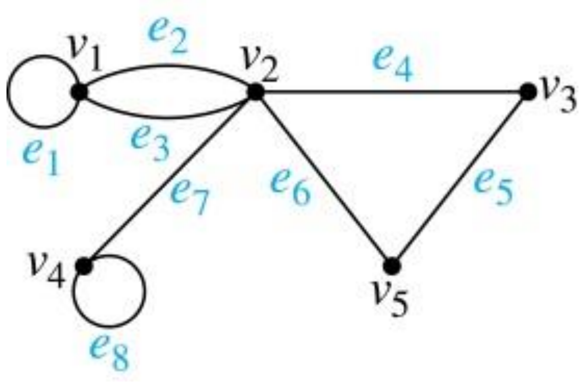
Basit graf ve İlişki matrisi



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Satırlar düğümleri, sütunlar da kenarları temsil etsin.

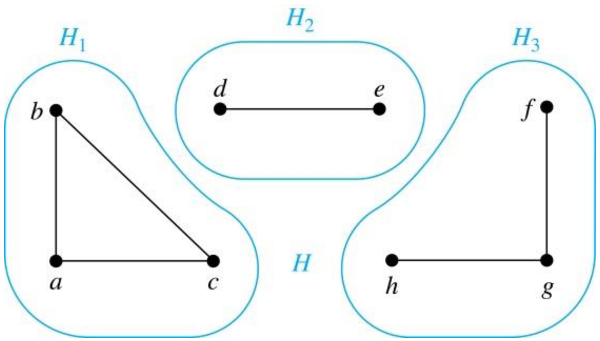
Pseudograph ve İlişki matrisi



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Graflarda Bağlılıklar

Tanım: Bir grafta herhangi bir düğümden, herhangi bir başka düğüme her zaman için bir yol varsa bu grafa **Bağlı Graf (connected graph)** denir. Bir düğüm için bile bu şart sağlanmaz ise **Bağlı Olmayan Graf** (disconnected graph) adı verilir.



- H1 grafı Bağlantılı Graftır
- H1 ve H2 den oluşan H grafı ise Bağlantılı Olmayan Graftır

Bağlı Bileşenler (Connected Components)

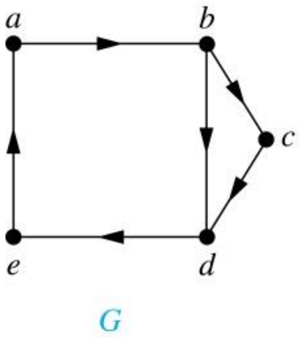
H1, H2 ve H3 den oluşan H grafının Bağlı Bileşenleri ise: H1, H2 ve H3

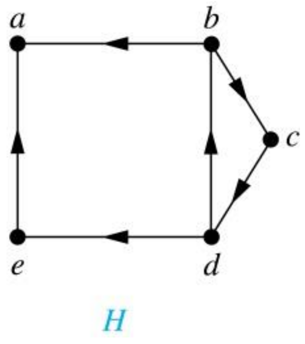
Yönlü Graflarda Bağlılıklar

Tanım: Yönlü bir grafta seçilen herhangi iki düğüm arasında gidiş ve dönüş için bir yol bulunuyorsa bu grafa **Güçlü Şekilde Bağlı Graf (Strongle Connected Graph)** denir.

Tanım: Yönlü bir grafın kenarlarının yönleri göz ardı edilerek elde edilen yönsüz bir grafta her iki düğüm çifti arasında bir yol varsa bu graf **Zayıf Bağlantılı Graf (Weakly Connected Graph)** adını alır.

devam…





G : strongly connected graph
H : not strongly connected graph

EN KISA YOL (SHORTEST PATH) ALGORİTMASI

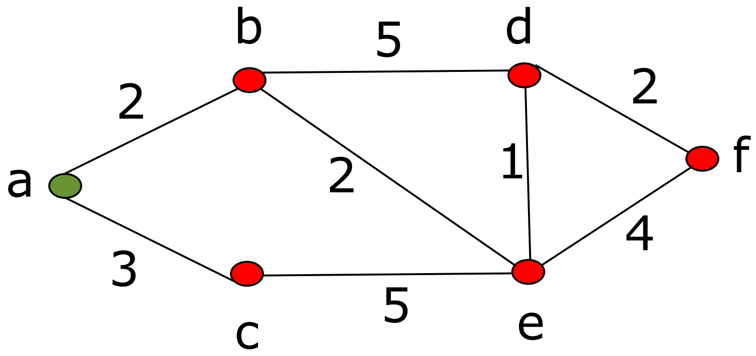
Dijkstra’s Algorithm

Dijkstra's Algorithm

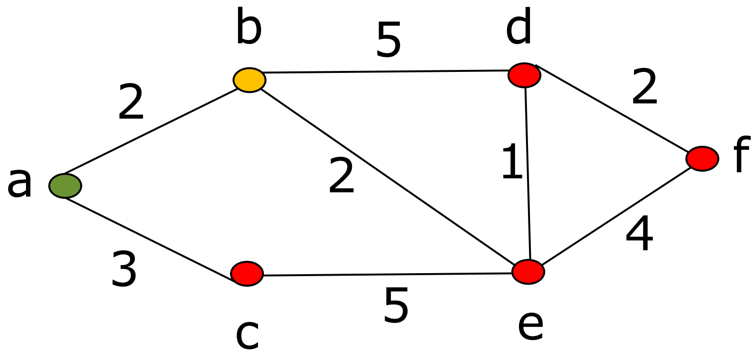
Dijkstra's algorithm is known to be a good algorithm to find a shortest path.

1. Set $i=0$, $S_0=\{u_0=s\}$, $L(u_0)=0$, and $L(v)=\text{infinity}$ for $v <> u_0$. If $|V| = 1$ then stop, otherwise go to step 2.
2. For each v in $V \backslash S_i$, replace $L(v)$ by $\min\{L(v), L(u_i)+d_v^{u_i}\}$. If $L(v)$ is replaced, put a label $(L(v), u_i)$ on v.
3. Find a vertex v which minimizes $\{L(v): v \text{ in } V \backslash S_i\}$, say u_{i+1}.
4. Let $S_{i+1} = S_i \text{ cup } \{u_{i+1}\}$.
5. Replace i by $i+1$. If $i=|V|-1$ then stop, otherwise go to step 2.

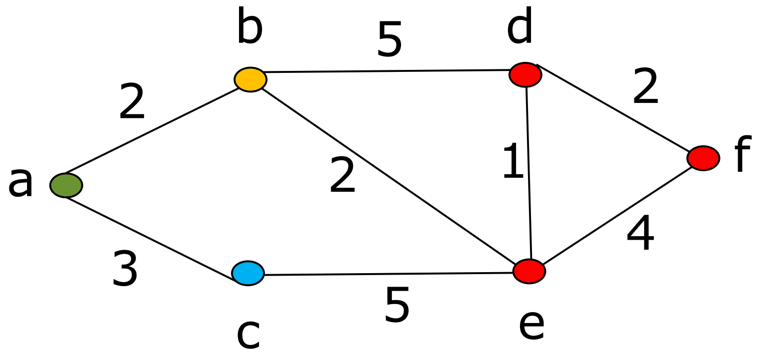
The time required by Dijkstra's algorithm is $O(|V|^2)$.
It will be reduced to $O(|E|\log|V|)$ if heap is used to keep $\{v \text{ in } V \backslash S_i : L(v) < \text{infinity}\}$.



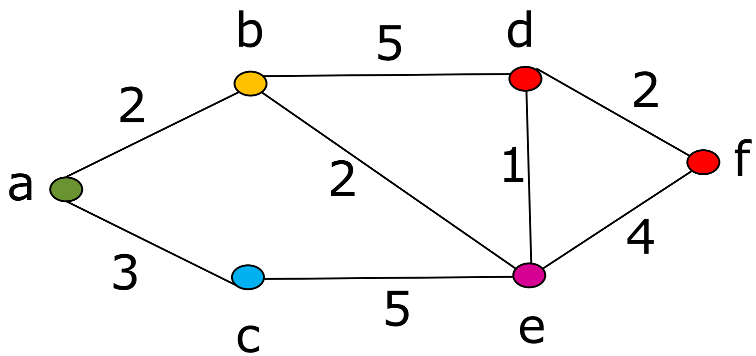
a	**0**					
b	**M**					
c	**M**					
d	**M**					
e	**M**					
f	**M**					



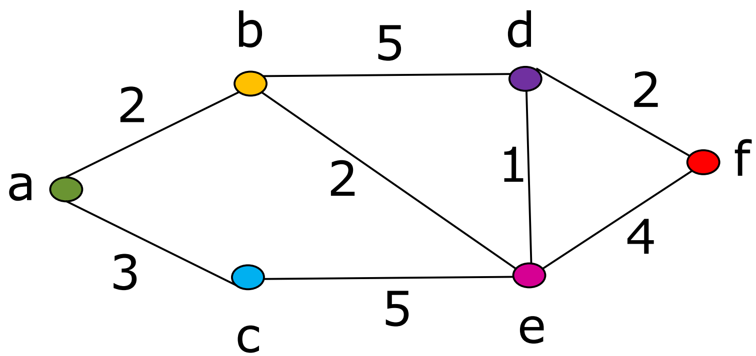
a	**0**	**-**				
b	**M**	**2a**				
c	**M**	**3a**				
d	**M**	**M**				
e	**M**	**M**				
f	**M**	**M**				



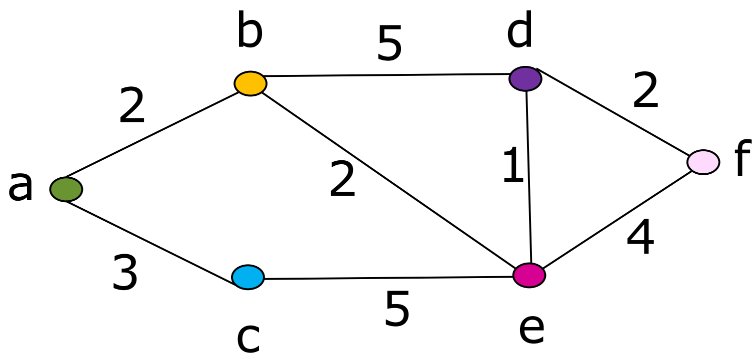
a	**0**	**-**				
b	**M**	**2a**	**-**			
c	**M**	**3a**	**3a**			
d	**M**	**M**	**7ab**			
e	**M**	**M**	**4ab**			
f	**M**	**M**	**M**			

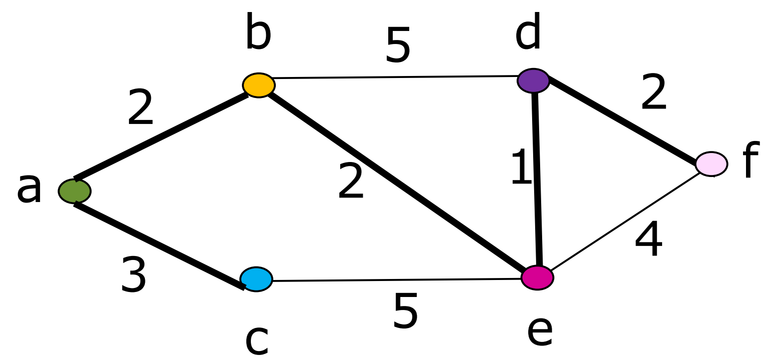


a	**0**	**-**				
b	**M**	**2a**	**-**			
c	**M**	**3a**	**3a**	**-**		
d	**M**	**M**	**7ab**	**7ab**		
e	**M**	**M**	**4ab**	**8ac**		
f	**M**	**M**	**M**	**M**		



a	**0**	**-**				
b	**M**	**2a**	**-**			
c	**M**	**3a**	**3a**	**-**		
d	**M**	**M**	**7ab**	**7ab**	**5abe**	
e	**M**	**M**	**4ab**	**8ac**	**-**	
f	**M**	**M**	**M**	**M**	**8abe**	





a	**0**	**-**				
b	**M**	**2a**	**-**			
c	**M**	**3a**	**3a**	**-**		
d	**M**	**M**	**7ab**	**7ab**	**5abe**	
e	**M**	**M**	**4ab**	**8ac**	**-**	
f	**M**	**M**	**M**	**M**	**8abe**	**7abed**

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo1

Mathematical Programming

Simplex

Twophase

Dijkstra

Prim

Kruskal

Ford-Fulkerson

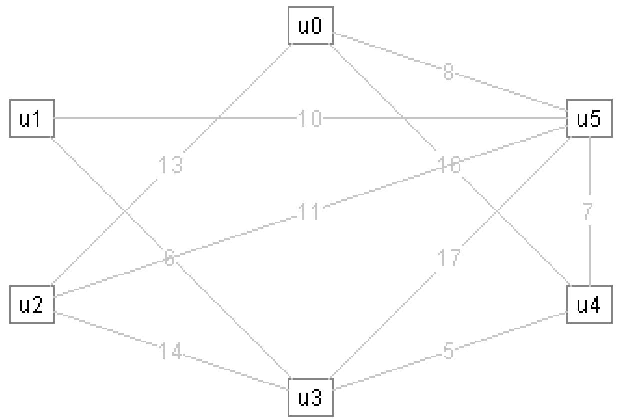
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

CLICK on the java applet below for several times to find a shortest path from u_0.



A (6,10) graph

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo1

[Mathematical Programming]

[Simplex]

[Twophase]

[Dijkstra]

[Prim]

[Kruskal]

[Ford-Fulkerson]

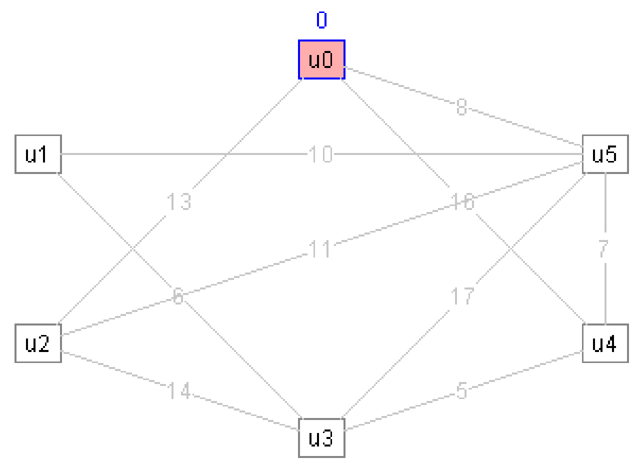
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- [demo2]
- [demo3]
- [demo4]
- [demo5]
- [demo6]
- [demo7]
- [demo8]
- [demo9]
- [demo10]

[FAQ]

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

CLICK on the java applet below for several times to find a shortest path from u_0.



[A (6,10) graph]

Internet

Start | Banu DIRI - Micr... | shortest path - ... | Java Applet D... | Ch-6 | Microsoft Power...

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo1

Google shortest path Search 28 blocked Check AutoLink AutoFill Options shortest path

Mathematical Programming

Simplex

Twophase

Dijkstra

Prim

Kruskal

Ford-Fulkerson

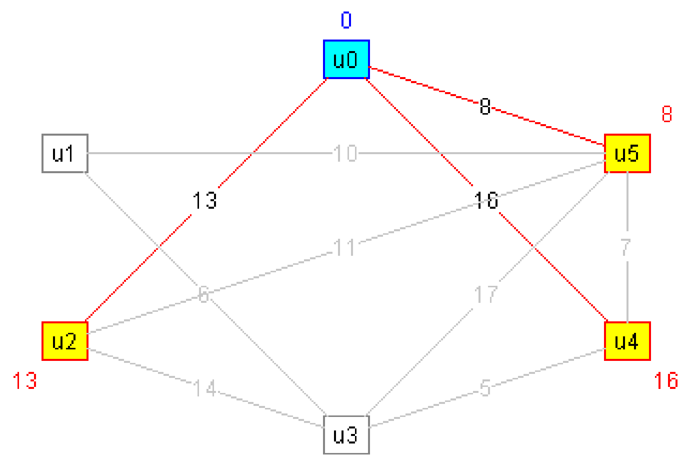
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

CLICK on the java applet below for several times to find a shortest path from u_0.



A (6,10) graph

Internet

Start Banu DIRI - Micr... shortest path - ... Java Applet D... Ch-6 Microsoft Power...

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo1

[Mathematical Programming](#)

[Simplex](#)

[Twophase](#)

[Dijkstra](#)

[Prim](#)

[Kruskal](#)

[Ford-Fulkerson](#)

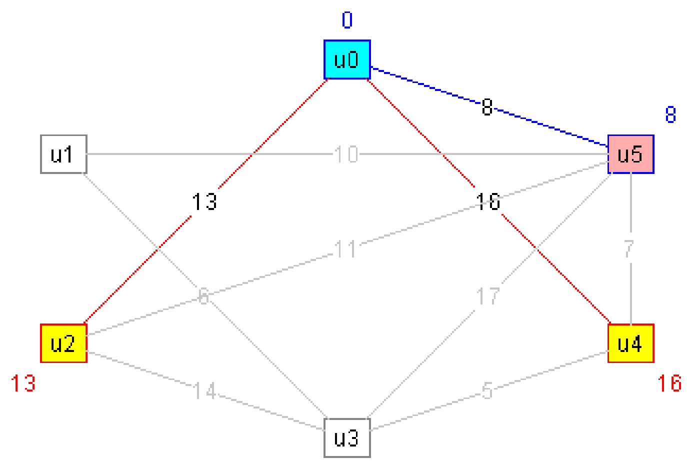
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

CLICK on the java applet below for several times to find a shortest path from u_0.



A (6,10) graph

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

Address: http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo1

Mathematical Programming

- Simplex
- Twophase
- Dijkstra
- Prim
- Kruskal
- Ford-Fulkerson

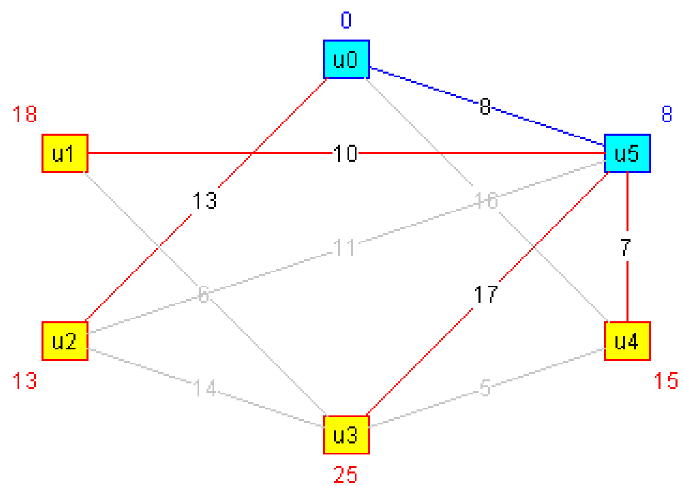
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

CLICK on the java applet below for several times to find a shortest path from u_0.



A (6,10) graph

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo1

Mathematical Programming

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

Simplex

Twophase

Dijkstra

Prim

Kruskal

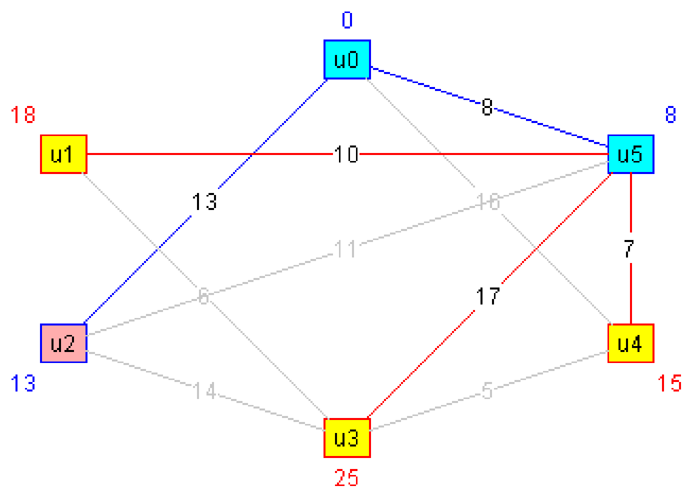
Ford-Fulkerson

Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

CLICK on the java applet below for several times to find a shortest path from u_0.



A (6,10) graph

Internet

Start | Banu DIRI - Micr... | shortest path - ... | Java Applet D... | Ch-6 | Microsoft Power...

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo1

[Mathematical Programming]

[Simplex]

[Twophase]

[Dijkstra]

[Prim]

[Kruskal]

[Ford-Fulkerson]

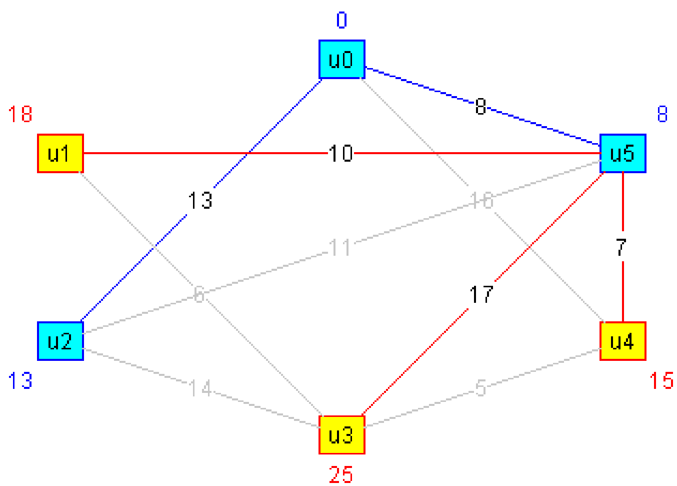
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

CLICK on the java applet below for several times to find a shortest path from u_0.



A (6,10) graph

Internet

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo1

Mathematical Programming

Simplex

Twophase

Dijkstra

Prim

Kruskal

Ford-Fulkerson

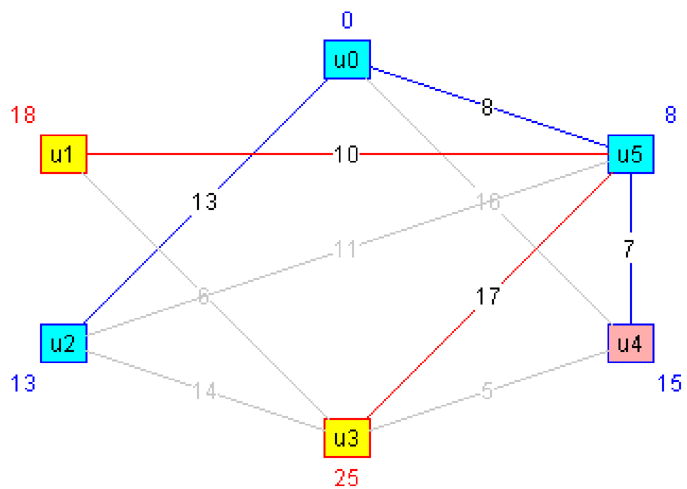
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

CLICK on the java applet below for several times to find a shortest path from u_0.



A (6,10) graph

Start Banu DIRI - Micr... shortest path - ... Java Applet D... Ch-6 Microsoft Power...

Mathematical Programming

Simplex

Twophase

Dijkstra

Prim

Kruskal

Ford-Fulkerson

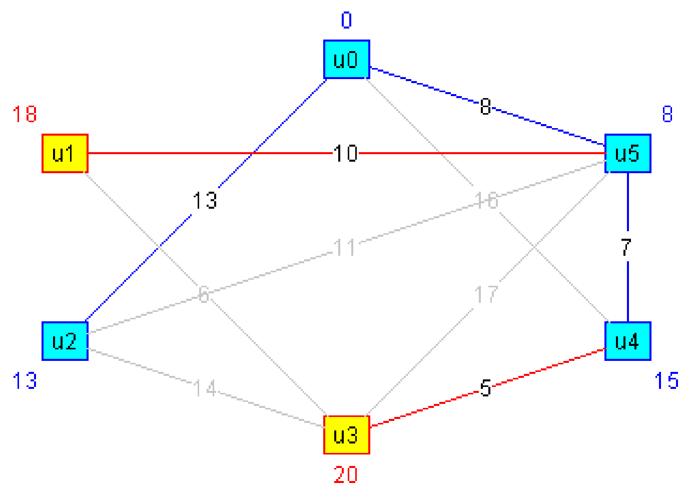
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

CLICK on the java applet below for several times to find a shortest path from u_0.



A (6,10) graph

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo1

[Mathematical Programming]

[Simplex]

[Twophase]

[Dijkstra]

[Prim]

[Kruskal]

[Ford-Fulkerson]

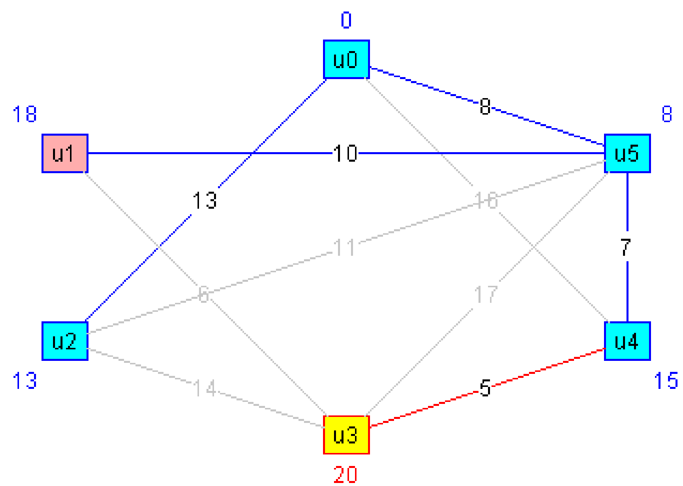
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

CLICK on the java applet below for several times to find a shortest path from u_0.



A (6,10) graph

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo1

Mathematical Programming

Simplex

Twophase

Dijkstra

Prim

Kruskal

Ford-Fulkerson

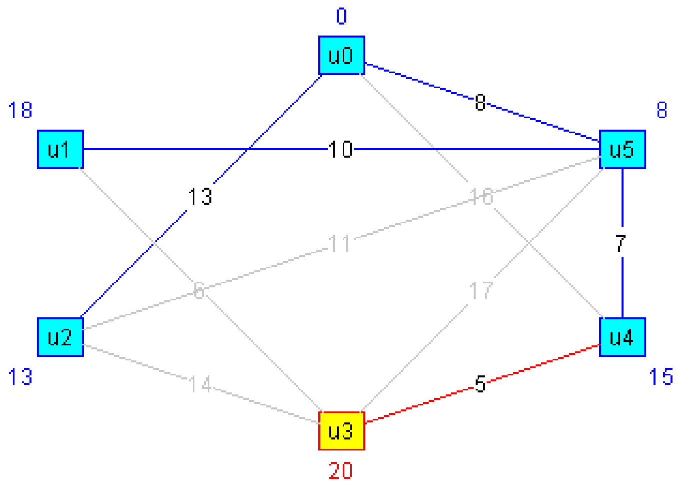
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

CLICK on the java applet below for several times to find a shortest path from u_0.



A (6,10) graph

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Back Search Favorites Media

Address http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo1 Go Links

Google shortest path Search 28 blocked Check AutoLink AutoFill Options shortest path

[Mathematical Programming]

[Simplex]

[Twophase]

[Dijkstra]

[Prim]

[Kruskal]

[Ford-Fulkerson]

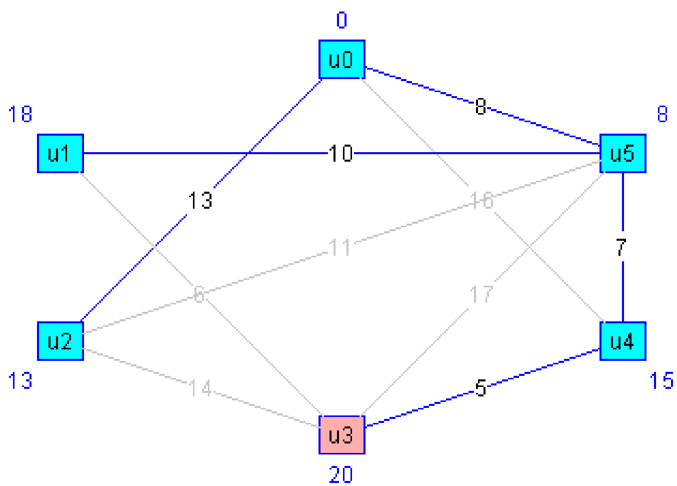
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

CLICK on the java applet below for several times to find a shortest path from u_0.



A (6,10) graph

Internet

Start Banu DIRI - Micr... shortest path - ... Java Applet D... Ch-6 Microsoft Power...

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

Address: http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo1

Mathematical Programming

- Simplex
- Twophase
- Dijkstra
- Prim
- Kruskal
- Ford-Fulkerson

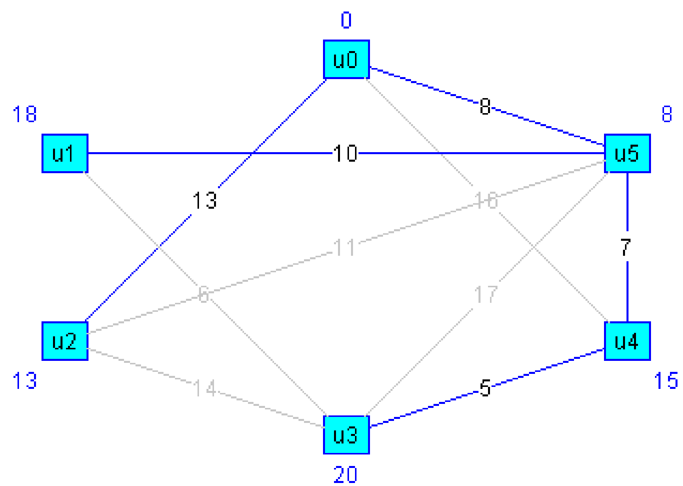
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

CLICK on the java applet below for several times to find a shortest path from u_0.



A (6,10) graph

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo3

[Mathematical Programming](#)

[Simplex](#)

[Twophase](#)

[Dijkstra](#)

[Prim](#)

[Kruskal](#)

[Ford-Fulkerson](#)

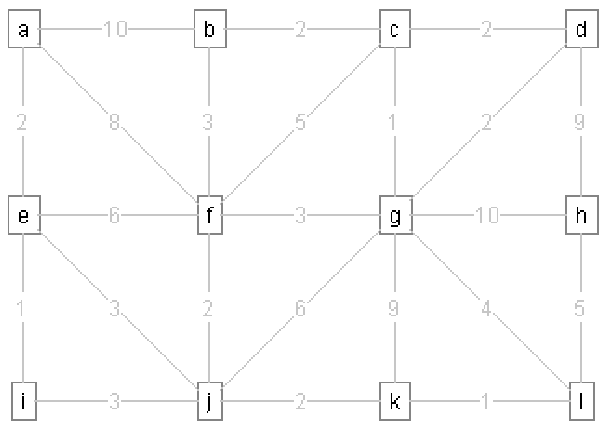
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

Click on the applet below for several times to find a shortest path from node a.



A (12,23) graph

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo3

Mathematical Programming

- Simplex
- Twophase
- Dijkstra
- Prim
- Kruskal
- Ford-Fulkerson

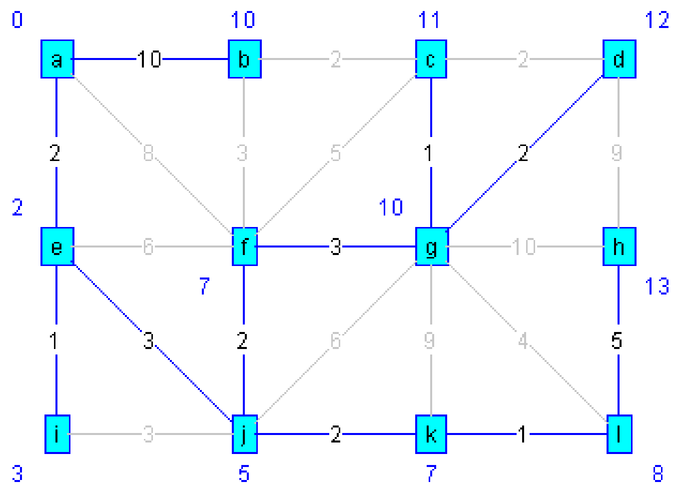
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

Click on the applet below for several times to find a shortest path from node a.



A (12,23) graph

Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo10

Mathematical Programming

Simplex

Twophase

Dijkstra

Prim

Kruskal

Ford-Fulkerson

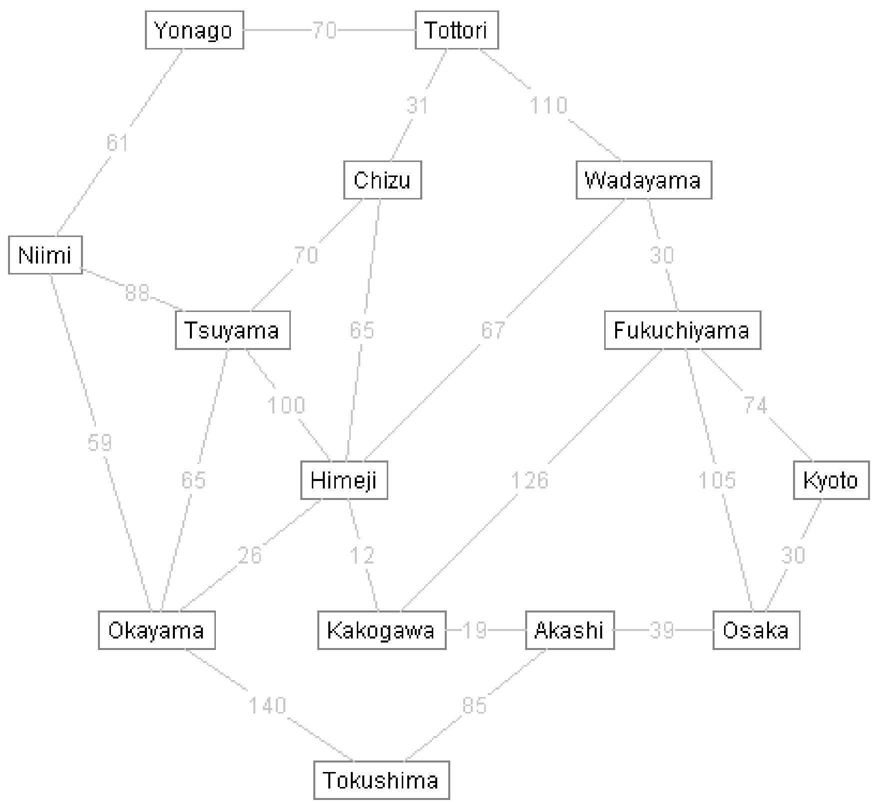
Dijkstra
Java applet demos:

- demo1
- demo2
- demo3
- demo4
- demo5
- demo6
- demo7
- demo8
- demo9
- demo10

FAQ

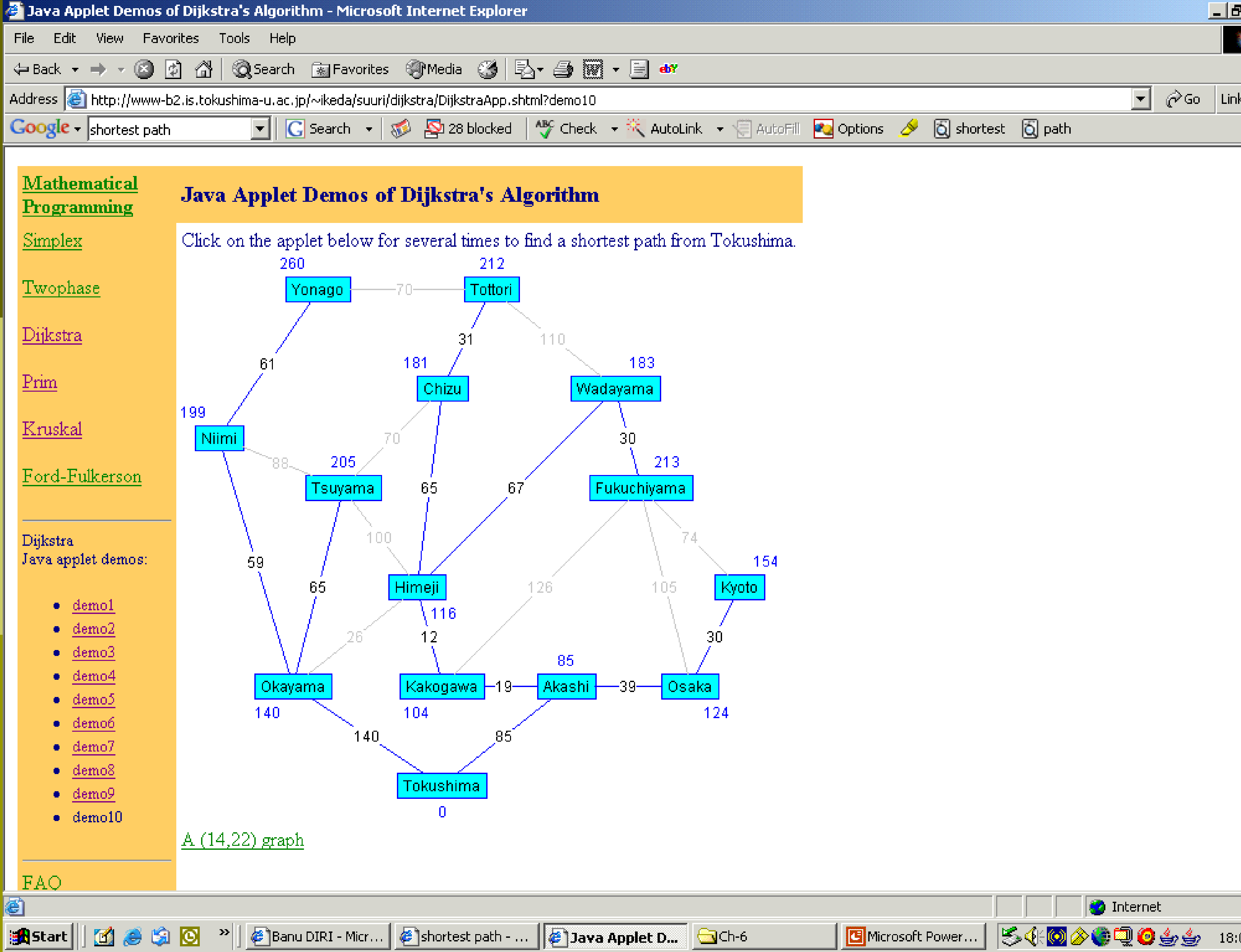
Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm

Click on the applet below for several times to find a shortest path from Tokushima.



A (14,22) graph

http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo7 Internet


Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm - Microsoft Internet Explorer
File Edit View Favorites Tools Help
Address http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/DijkstraApp.shtml?demo10
shortest path
Mathematical Programming
Simplex
Twophase
Dijkstra
Prim
Kruskal
Ford-Fulkerson
Dijkstra
Java applet demos:
demo1
demo2
demo3
demo4
demo5
demo6
demo7
demo8
demo9
demo10
FAQ
Java Applet Demos of Dijkstra's Algorithm
Click on the applet below for several times to find a shortest path from Tokushima.
Yonago 260
Tottori 212
Chizu 181
Wadayama 183
Niimi 199
Tsuyama 205
Fukuchiyama 213
Himeji 116
Kyoto 154
Okayama 140
Kakogawa 104
Akashi 85
Osaka 124
Tokushima 0
70
61
31
110
30
88
65
67
59
100
74
126
105
26
12
30
19
39
140
85
A (14,22) graph
Internet

Graf Modelleri

Farklı alanlarda farklı graf modelleri kullanılır.

Niche Overlap Graf : Eko sistem içerisindeki farklı grubları modellemede kullanılır.

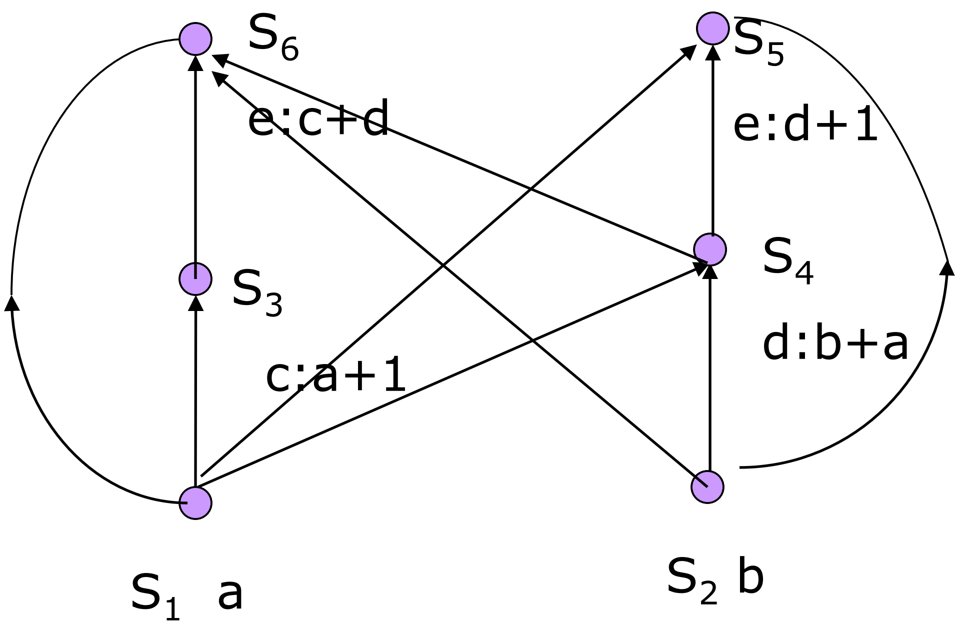
Influence Graf: Grup çalışmalarında, grup içerisindeki kişilerin birbirlerini etkilemesini modellemede kullanılır.

Round-Robin Tournament Graf: Turnuvada yer alan her takımın, hangi takımla karşılaştığını ve oyunu kimin kazandığını göstermede kullanılır.

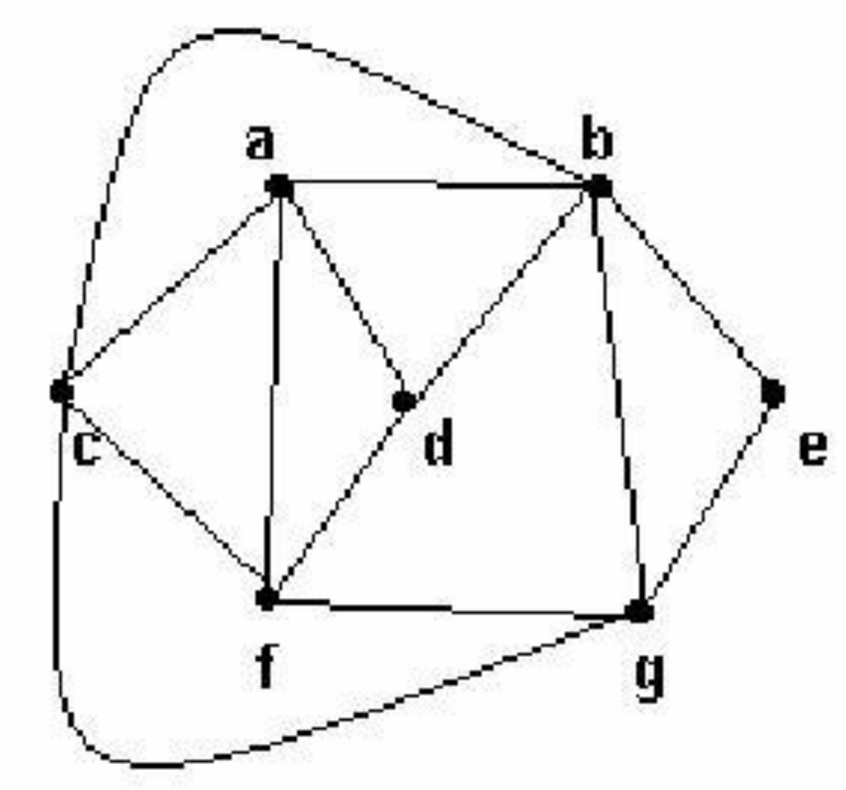
Precedence Graf: Bir işlemin sonucu, kendisinden önce gelen işlemin sonucuna bağlı olarak değişen sistemleri modellemede kullanılır.

Precedence grafa örnek....

S_1 **a:0** S_2 **b:1** S_3 **c:a+1** S_4 **d:b+a** S_5 **e:d+1** S_6 **e:c+d**



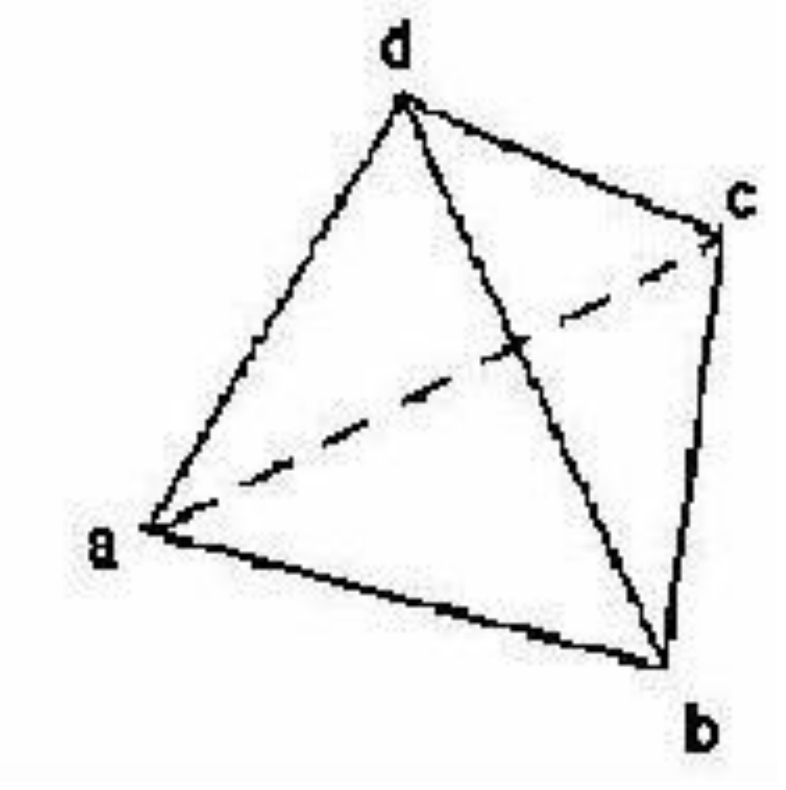
Planar Graflar



Bir G grafının kenarları birbirlerini kesmeyecek şekilde çizilebiliyorsa ***Planar*** graf olarak adlandırılır.

Euler'in formülü

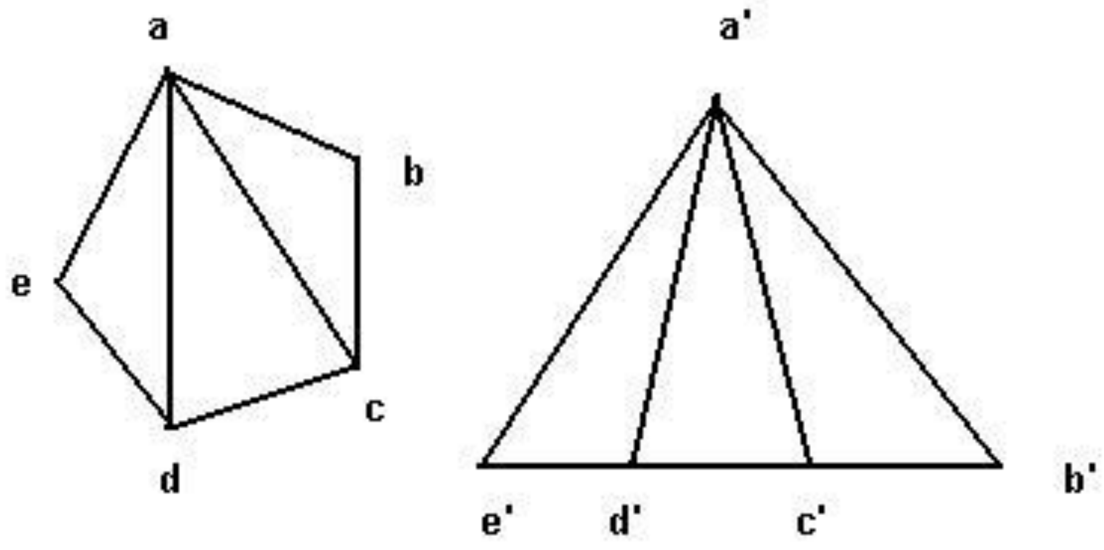
- Eğer G bir *planar* graph is
  - v = düğüm sayısı
  - e = kenar sayısı
  - f = yüzey sayısı
- Öyleyse v – e + f = 2



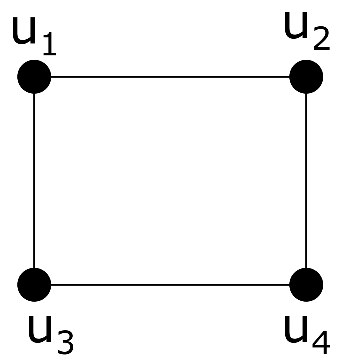
İzomorfik (Isomorphic) Graflar

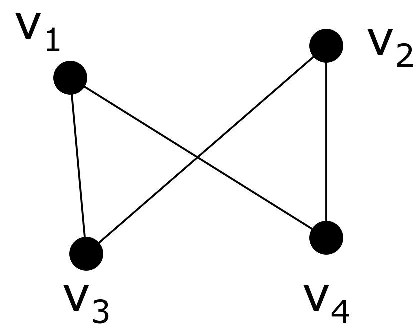
İki grafın izomorfik olup olmadığı nasıl kontrol edilir ?

- Kenar sayıları aynı olmalıdır.
- Düğüm sayıları aynı olmalıdır.
- Düğüm dereceleri aynı olmalıdır.
- Düğümler arasındaki ilişkiyi gösteren matrisler aynı olmalıdır. Bu matrislerdeki benzerlik satır ve sütunlardaki yer değişikliği ile de sağlanabilir.



Örnek





Bu iki graf izomorfik midir?

EVET

Her iki grafında 4 düğümü, 4 kenarı ve her düğümünün de derecesi 2 dir

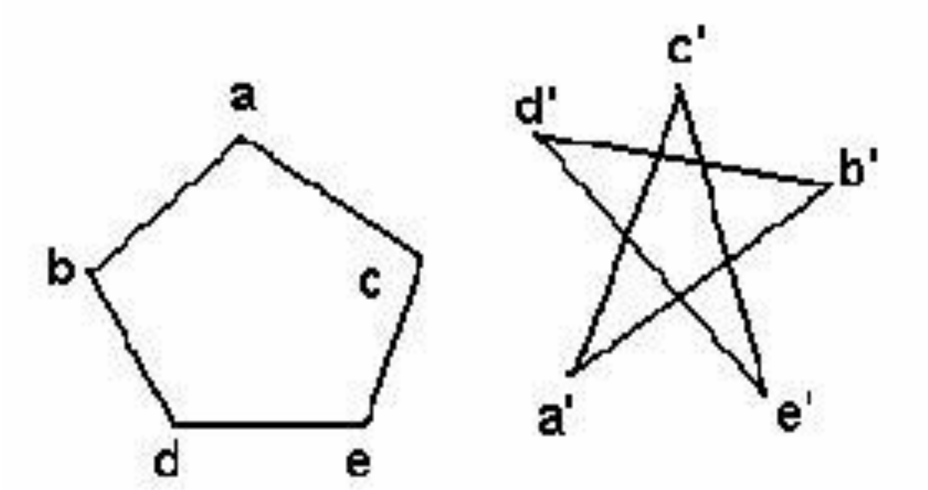
	u1	u2	u3	u4
u1	0	1	1	0
u2	1	0	0	1
u3	1	0	0	1
u4	0	1	1	0

	v1	v2	v3	v4
v1	0	0	1	1
v2	0	0	1	1
v3	1	1	0	0
v4	1	1	0	0

u_2 ve u_4 satır ve sütunlar yerdeğiştiriyor

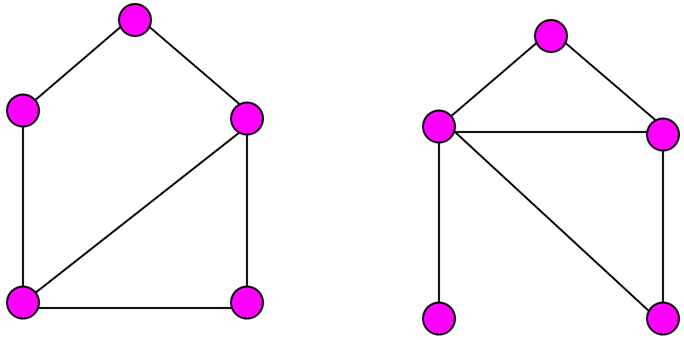
Örnek

- **Aşağıda verilmiş olan iki graf izomorfik midir?** EVET



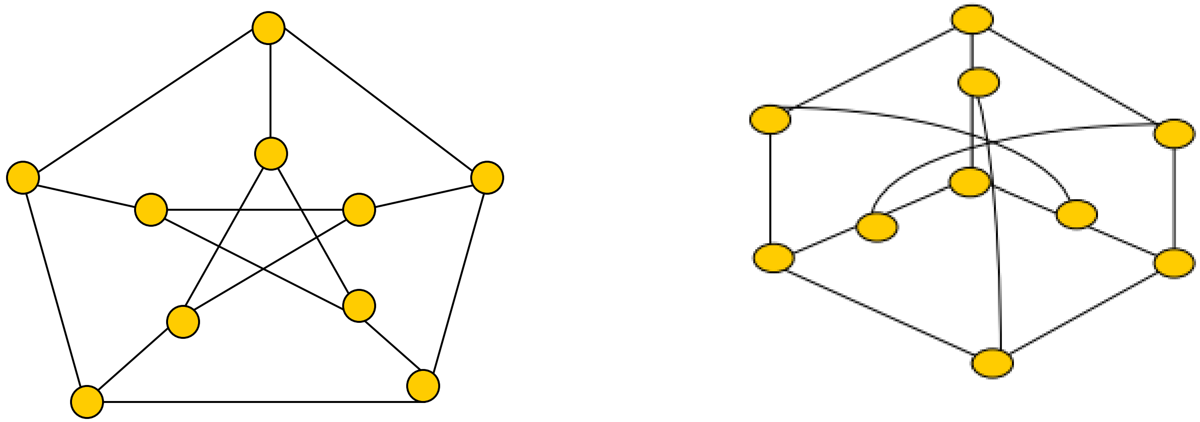
	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	1	0	0	1	0
c	1	0	0	0	1
d	0	1	0	0	1
e	0	0	1	1	0

Örnek



Bu iki graf izomorfik midir ?

HAYIR



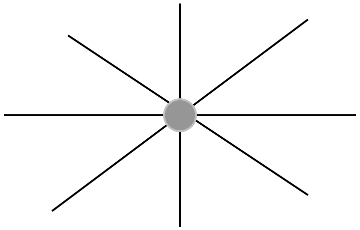
Bu iki graf izomorfik midir ? EVET

Özel Tip Graflar

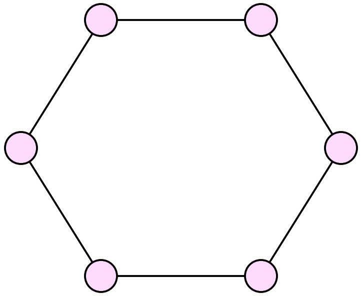
- Özel tip graflar genellikle veri iletişimi ve paralel veri işleme uygulamalarında kullanılır.

Local Area Network : Bir bina içerisindeki midi ve pc gibi farklı bilgisayarları ve çevrebirimlerini birbirine bağlamak için kullanılır. Bu ağların farklı topolojileri mevcuttur.

« **Star Topology :** Bütün cihazlar, merkezdeki cihaz üzerinden birbirlerine bağlanırlar. $K_{1,n}$ complete Bipartite Graf kullanılır.



« **Ring Topology :** Bu modelde her cihaz diğer iki farklı cihaz ile birbirine bağlıdır. n-cycles C_n modelidir.



« **Hybrid Topology :** Star ve Ring topology'sini birlikte kullanır. Bu tekrarlılık network'ün daha güvenli olmasını sağlar. Whell, W_n graf modeline karşılık gelir.