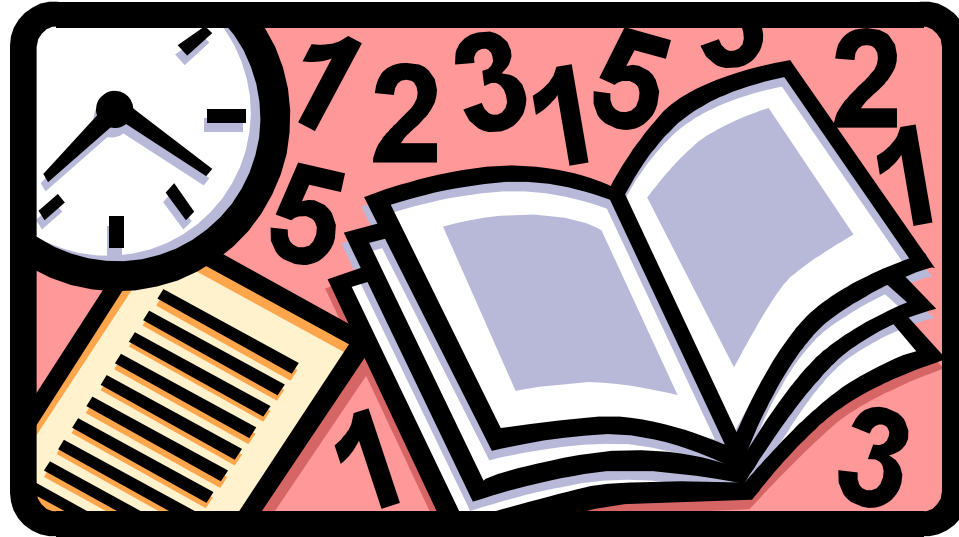


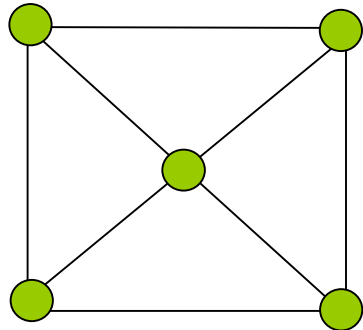
BÖLÜM 7

Graf Boyama ve Kromatic Polinomlar (Graph Coloring and Chromatic Polynomial)



Tanım

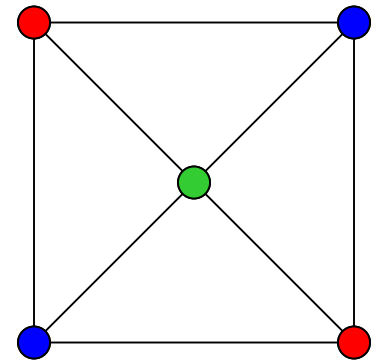
- ❖ Bir **G** grafının herhangi iki komşu düğümüne aynı renk atanmayacak şekilde, grafın her bir düğümüne bir renk atanmasına bir grafın **renklendirilmesi** denir.
- ❖ Bir grafın **renk** (kromatik) sayısı, grafın renklendirilmesi için gerekli olan **en az renk** sayısıdır. Bir **G** grafının renk (kromatik) sayısı $X(G)$ ile gösterilir.



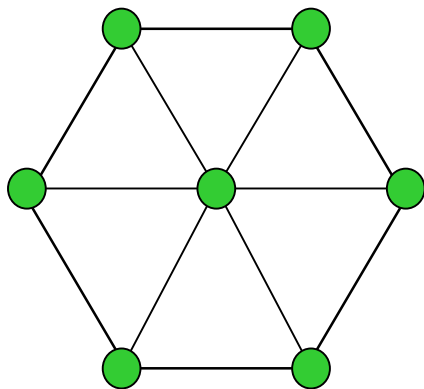
Grafın renk (kromatik) sayısı kaçtır?

$X(G) = 3$ renk mi?

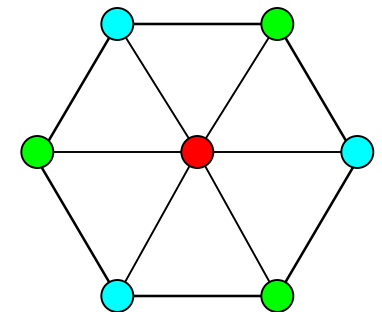
$X(G) = 4$ renk mi?



$X(G) = 3$



Grafın renk (kromatik) sayısı kaçtır?



$X(G) = 3$

Örnek

- Bir üniversite içerisinde profesör ünvanlı akademisyenlerden oluşan 10 tane kurul olsun
- Bu kurullar haftada bir kez toplanmaktadır
- Bir akademisyen birden fazla kurulda görev alabilir
- Tüm toplantıların en kısa sürede tamamlanması ve akademisyenlerin katılacağı toplantılarda çakışma olmaması istenmektedir

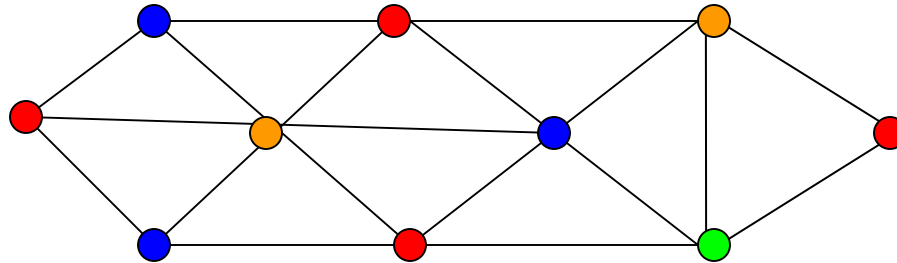
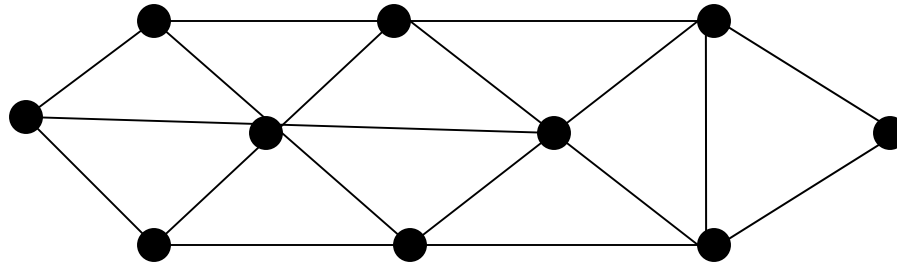
Kaç farklı toplantı oluşturulmalıdır?

Düğümmler = Kurullar

Kenarlar = Çakışan akademisyenler

Renkler = Farklı toplantı zamanları

Grafımız aşağıdaki şekildeki gibi olsun.



$$X(G)=4$$

Kromatik Polinomlar

Bir G grafının kromatik polinomu $\mathbf{P(G)}$, G grafını minimum k renkle renklendirmenin kaç farklı şekilde yapılacağını verir.

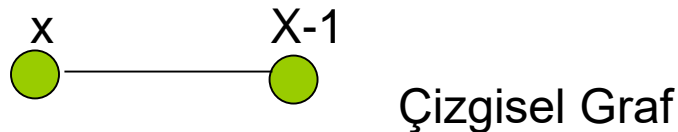
Deletion Contraction Method

$$P_k(G) = P_k(G - e) - P_k(G \setminus e)$$

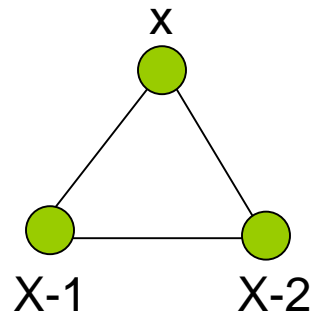
kenarı silme

Silinen kenara ait düğümleri
birleştirme

Kromatik Polinomu bilinen graflar



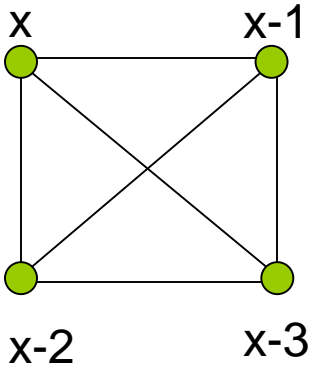
U grafi \longrightarrow $U_n = x(x-1)^{n-1}$



Z Grafi veya K Grafi

$$K_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x - k)$$

Örnek



K grafi olup, bütün düğümler birbiri ile bağlantılıdır.

$$K_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x - k)$$

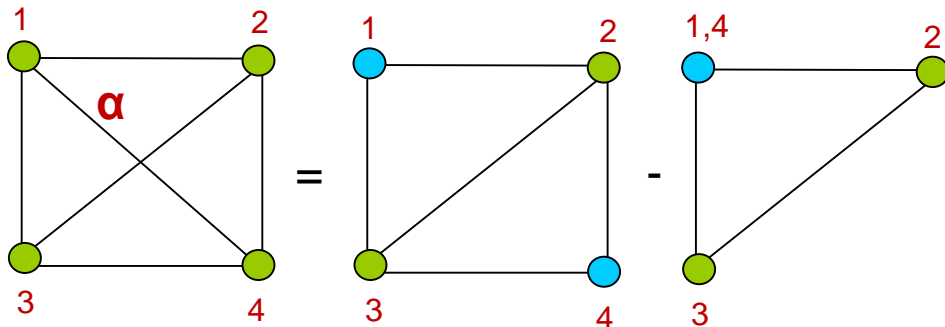
$$\begin{aligned} K_4 &= x(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= (x^2 - x)(x^2 - 5x + 6) \\ &= 1x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \end{aligned}$$

$x=1$ için değeri 0
 $x=2$ için değeri 0
 $x=3$ için değeri 0
 $x=4$ için değeri 24

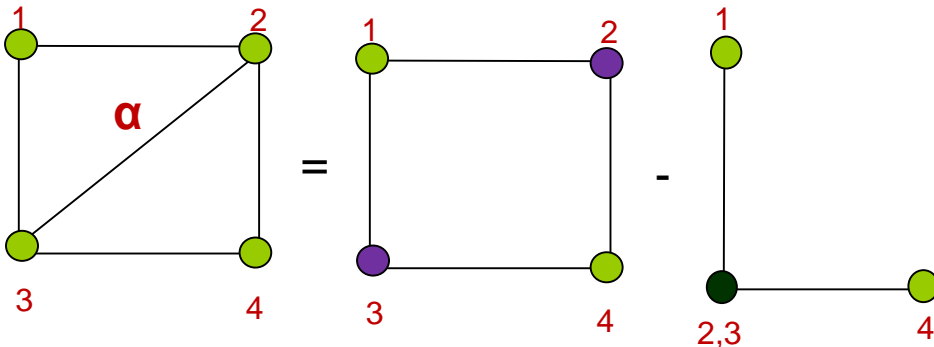
$$\begin{array}{r} 1\ 5\ 6 \\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 5\ 6 \\ 1\ 5\ 6 \\ + \hline 1\ 6\ 11\ 6 \end{array}$$

4 farklı renk ile 24 farklı şekilde boyanır

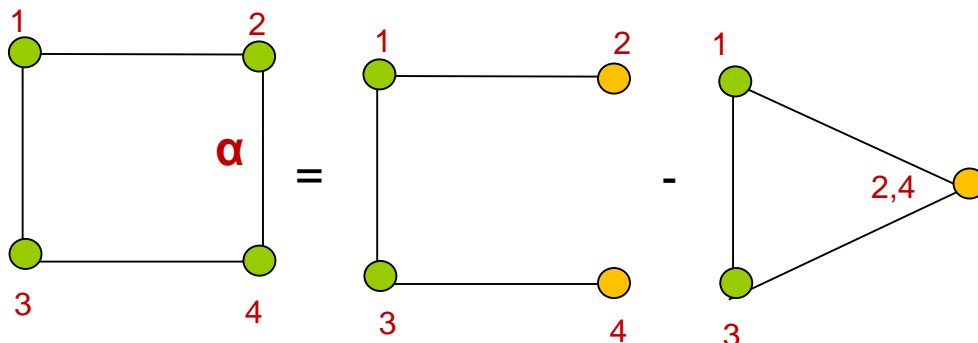
Örnek



$$\begin{aligned}
 &= x(x-1)(x^2-4x+4) - x(x-1)(x-2) \\
 &= x(x-1)(x^2-4x+4-x+2) \\
 &= x(x-1)(x^2-5x+6) \\
 &= x^4-6x^3+11x^2-6x
 \end{aligned}$$

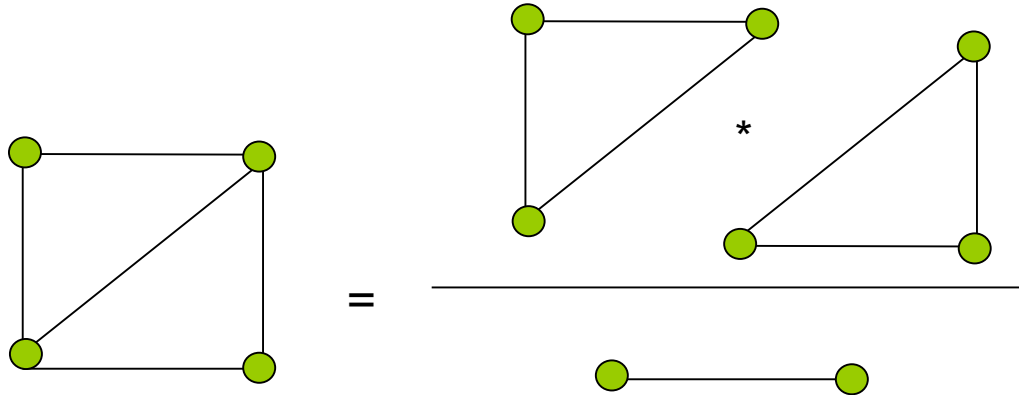


$$\begin{aligned}
 &= x(x-1)(x^2-3x+3) - x(x-1)^2 \\
 &= x(x-1)(x^2-3x+3-x+1) \\
 &= x(x-1)(x^2-4x+4)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2) \\
 &= x(x-1)[(x-1)^2-(x-2)] \\
 &= x(x-1)(x^2-3x+3)
 \end{aligned}$$

Eğer, iki graf birbirinden **Noktasal** veya **Çizgisel** bir graf ile ayrılıyorsa...



$$\begin{array}{r}
 1\ 4\ 4 \\
 1\ 1 \\
 \hline
 1\ 4\ 4 \\
 \quad 1\ 4\ 4 \\
 + \hline
 1\ 5\ 8\ 4
 \end{array}$$

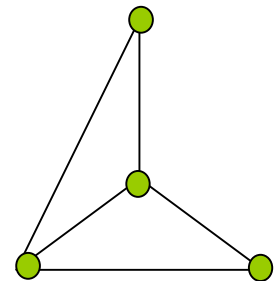
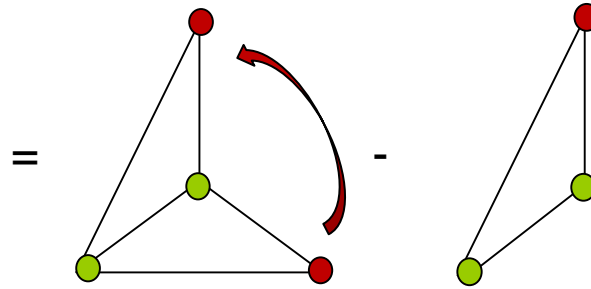
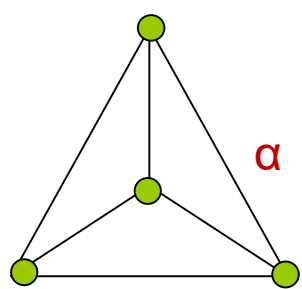
$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2 (x-1)^2 (x-2)^2}{x (x-1)} = (x^2 - x)(x^2 - 4x + 4) \\
 & = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x
 \end{aligned}$$

3 renk ile boyanır
 $3 * 2 * 1 = 6$ değişik şekilde

Kurallar

- 1) a_1 her zaman **1** olmalıdır
- 2) Polinomun derecesi grafın düğüm sayısını verir
- 3) Terimlerin katsayılarının toplamı **0** olur
- 4) Polinomun katsayılarının işaretleri **+**, **-** diye gider
- 5) Polinomda sabit terim olmaz

Örnek



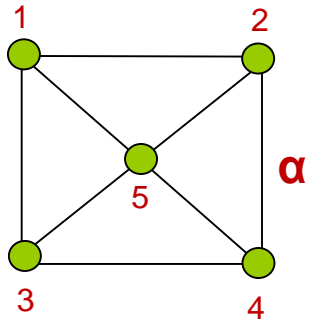
$$= \frac{\text{K3} + \text{K3}}{\text{K2}} = \frac{x^2 (x-1)^2 (x-2)^2}{x (x-1)}$$

$$= x(x-1)(x-2)^2 - x(x-1)(x-2) \\ x(x-1)(x-2)[(x-2) - 1] \\ x(x-1)(x-2)(x-3) \\ (x^2-x)(x^2-5x+6) \\ x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

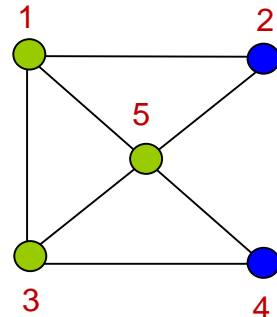
K_4 grafi 4 renk ile 24 farklı şekilde boyanır

Örnek

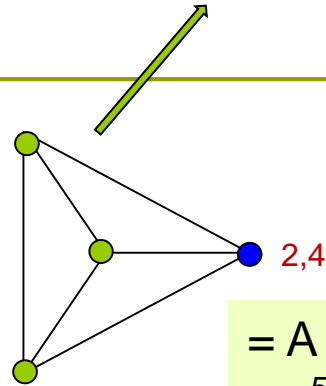
$$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$



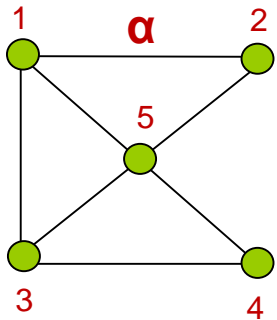
=



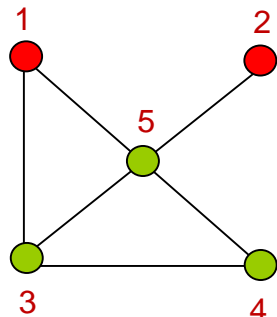
-



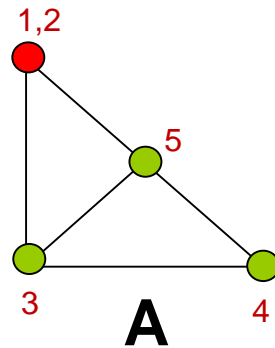
$$= A(x-2) - (x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x) \\ x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 31x^2 + 14x$$



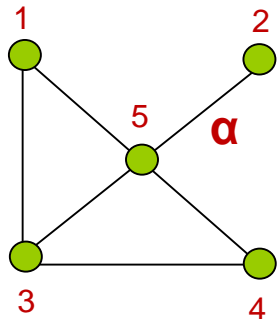
=



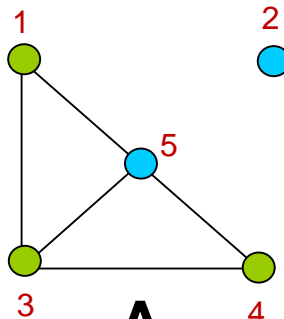
-



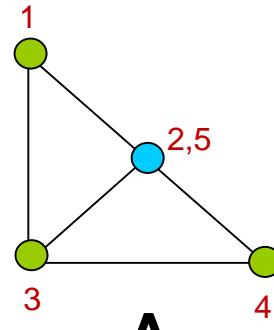
$$= A(x-1) - A \\ Ax - A - A \\ Ax - 2A \\ A(x-2)$$



=

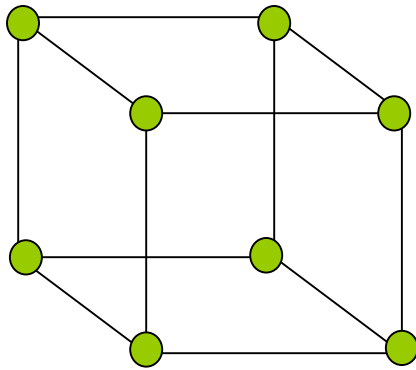


-



$$= A(x-1)$$

Örnek



Minimum kaç renk ile boyanabilir ?

$$x^8 - 12x^7 + 66x^6 - 208x^5 + 325x^4 - 131x^3 + 90x^2 - 131x$$