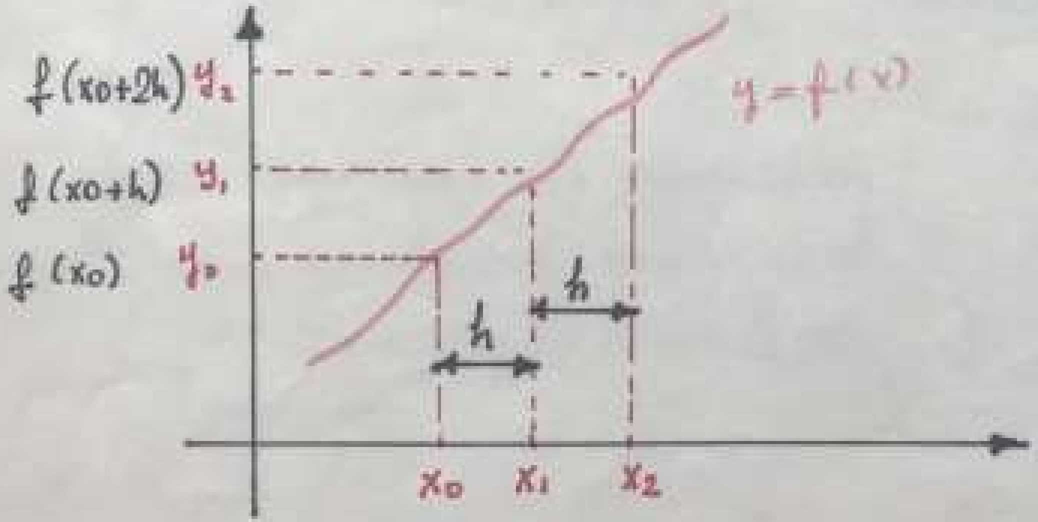
SONLU FARKLAR

Matematik ve fizikteki problemler genellikle sürekli ve çok değişkenlidir. Bu fonksiyonlar bir formül şeklinde verilebilir ve değişkenlerin belli değerleri için hemen fonksiyonun değeri bulunabilir. Ancak bazen bir fonksiyon sadece birtakım ayrık noktalarda belirlenmiş olabilir. Bu takdirde sonlu farklar matematiği kullanılarak bilinmeyen noktada fonksiyonun değeri için iyi bir tahmin yapılabilir.

Sonlu Farklar İle İlgili Operatörler;

Birbirini takip eden iki ayrık nokta arasındaki farka **fark aralığı** denir ve h ile gösterilerek,

$$h = x_{k+1} - x_k$$ yazılır.



Bir $f(x)$ fonksiyonu ve adım uzunluğu h kullanılarak x noktası için 1. derece ileri fark;

a) $\Delta \rightarrow$ ileri fark operatörü

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

şeklinde hesaplanır.

b) $\nabla \rightarrow$ Geri fark operatörü

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

şeklinde hesaplanır.

c) $\delta \longrightarrow$ Merkezi Fark Operatörü

$\delta f(x) = f(x+h/2) - f(x-h/2)$ olarak hesaplanır.

d) $\mu \longrightarrow$ Ortalama Operatörü

$\mu f(x) = 1/2\,[\,f(x+h/2) + f(x-h/2)\,]$ olarak hesaplanır.

e) $E \longrightarrow$ Kaydırma Operatörü

$Ef(x) = f(x+h)$ şeklindedir. Bu operatör $f(x)$ fonksiyonunu kendinden sonra gelen ilk değere yükseltir.

$$E f(x) = f(x+h) = f(x) + \Delta f(x)$$
$$E f(x) = f(x)(1+\Delta)$$

$E = (1+\Delta)$ olarak bulunur.

Bir $f(x)$ fonksiyonuna iki defa kaydırma kaydırma operatörü uygulanırsa;

$$E^2 f(x) = E(E f(x)) = E f(x+h)$$
$$= f(x+2h) \quad \text{olacaktır.}$$

Genelleştirirsek $E^n f(x) = f(x+nh)$

İki veya daha yüksek dereceden ileri, Geri ve Merkezi Farklar ile aralarındaki ilişkiler;

Eşit aralıklarla verilen ayrık noktalar;

$$x_1 = x_0 + h$$
$$x_2 = x_0 + 2h$$
$$x_3 = x_0 + 3h$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x_n = x_0 + nh$$

ile gösterilerek;

F(x) fonksiyonunun bu noktalardaki değerlerine de;

$$f(x_0) = f_0$$
$$f(x_1) = f_1$$
$$f(x_n) = f_n$$

dersek, herhangi bir x_i noktasındaki

1. derece ileri fark:

$$\boxed{\Delta f_i = f_{i+1} - f_i}$$

$i = 0, 1, \ldots, n$ şeklinde yazılır.

2. derece ileri fark:

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i)$$
$$= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

$$\Delta f_{i+1} = f_{i+2} - f_{i+1}$$
$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - f_{i+1} - f_{i+1} + f_i$$

$$\boxed{\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2 f_{i+1} + f_i}$$

3. derece ileri fark.

$$\Delta^3 f_i = \Delta(\Delta(\Delta f_i))$$

?

$$\begin{aligned}
&= \Delta(\Delta(f_{i+1} - f_i)) \\
&= \Delta(\Delta f_{i+1} - \Delta f_i) \\
&= \Delta(f_{i+2} - f_{i+1} - f_{i+1} + f_i) \\
&= \Delta(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) \\
\Delta^3 f_i &= \Delta f_{i+2} - 2\Delta f_{i+1} + \Delta f_i \\
&= f_{i+3} - f_{i+2} - 2(f_{i+2} - f_{i+1}) + f_{i+1} - f_i \\
&= f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i}$$

Birinci (1.) derece geri fark fonksiyonu;

$$\boxed{\nabla f_i = f_i - f_{i-1}}$$

2. derece geri fark fonksiyonu;

$$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1})$$
$$= \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$$
$$= f_i - f_{i-1} - (f_{i-1} - f_{i-2})$$
$$= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$

$$\boxed{\nabla^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}$$

3. derece geri fark fonksiyonu;

$$\nabla^3 f_i = \nabla(\nabla(\nabla f_i)) = \nabla(\nabla(f_i - f_{i-1})$$

$$= \nabla(\nabla f_i - \nabla f_{i-1})$$

$$= \nabla(f_i - f_{i-1} - (f_{i-1} - f_{i-2})$$

$$= \nabla(f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2})$$

$$= \nabla f_i - 2\nabla f_{i-1} + \nabla f_{i-2}$$

1. derece merkezi fark:

$$\boxed{\delta f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}$$

2. derece merkezi fark:

$$\delta^2 f_i = \delta(\delta f_i) = \delta(f_{i+1/2} - f_{i-1/2})$$

$$= f_{i+1} - f_i - (f_i - f_{i-1})$$

$$= f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$$

$$\boxed{\delta^2 f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}$$

3. derece merkezi fark:

$$\delta^3 f_i = \delta(\delta(\delta f_i)) = \delta(\delta(f_{i+1/2} - f_{i-1/2}))$$
$$= \delta(\delta(f_{i+1/2}) - \delta(f_{i-1/2}))$$
$$= \delta(f_{i+1} - f_i - (f_i - f_{i-1}))$$
$$= \delta(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$$
$$= f_{i+3/2} - f_{i+1/2} - 2(f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) + f_{i-1/2} - f_{i-3/2}$$
$$= f_{i+3/2} - 3f_{i+1/2} + 3f_{i-1/2} - f_{i-3/2}$$

$$\boxed{\delta^3 f_i = f_{i+3/2} - 3f_{i+1/2} + 3f_{i-1/2} - f_{i-3/2}}$$

n. derece ileri fark formülü ise;

$\Delta^n f_i = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i$ şeklindedir.

Üç operatör arasındaki ilişkiler;

$$\Delta f_i = \delta f_{i+1/2} = \nabla f_{i+1}$$
$$\Delta^2 f_i = \delta^2 f_{i+1} = \nabla^2 f_{i+2}$$
$$\vdots$$
$\Delta^r f_i = \delta^r f_{i+r/2} = \nabla^r f_{i+r}$ bağıntısı yazılır.

$$\Delta^k f_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} f_{k-i}$$

formülüyle istenilen derecede katsayılar hesaplanabilir.

$\binom{k}{i}$ açılımı $\dfrac{k!}{i!(k-i)!}$ şeklindedir.

ÖRNEK:

$k=5$ için: ileri fark formülünden 5. türevi alınır.

ÖRNEK:

$k=5$ için: İleri fark formülünden 5. türevi alınır.

$$\Delta^5 f_5 = \sum_{i=0}^{5} (-1)^i \binom{5}{i} f_{5-i}$$

$i=0 \quad (-1)^0 \binom{5}{0} f_{5-0} = 1 * \frac{5!}{0!\,5!} f_5 = f_5$

$i=1 \quad (-1)^1 \binom{5}{1} f_{5-1} = -1 * \frac{5!}{1!\,4!} f_4 = -5 f_4$

$i=2 \quad (-1)^2 \binom{5}{2} f_{5-2} = 1 * \frac{5!}{2!\,3!} f_3 = 10 f_3$

$i=3 \quad (-1)^3 \binom{5}{3} f_{5-3} = -1 * \frac{5!}{3!\,2!} f_2 = -10 f_2$

$i=4 \quad (-1)^4 \binom{5}{4} f_{5-4} = 1 * \frac{5!}{4!\,1!} f_1 = 5 f_1$

$i=5 \quad (-1)^5 \binom{5}{5} f_{5-5} = -1 * \frac{5!}{5!\,0!} f_0 = -f_0$

$$\Delta^5 f_k = -5 f_4 + f_5 + 10 f_3 - 10 f_2 + 5 f_1 - f_0$$

$$f_5 - 5 f_4 + 10 f_3 - 10 f_2 + 5 f_1 - f_0$$

SONLU FARK TABLOLARI

İleri Fark Tablosu

$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$

$\Delta f_0 = f_1 - f_0$

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
x_0	f_0				
x_1	f_1	Δf_0			
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$		
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	
x_4	f_4	Δf_3	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_0$

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$				
x_0+h	$f(x_0+h)$	$\Delta f(x_0)$			
x_0+2h	$f(x_0+2h)$	$\Delta f(x_0+h)$	$\Delta^2 f(x_0)$		
x_0+3h	$f(x_0+3h)$	$\Delta f(x_0+2h)$	$\Delta^2 f(x_0+h)$	$\Delta^3 f(x_0)$	
x_0+4h	$f(x_0+4h)$	$\Delta f(x_0+3h)$	$\Delta^2 f(x_0+2h)$	$\Delta^3 f(x_0+h)$	$\Delta^4 f(x_0)$

GERİ FARK TABLOSU

x_i	$f(x_i)$	$\nabla f(x_i)$	$\nabla^2 f(x_i)$	$\nabla^3 f(x_i)$	$\nabla^4 f(x_i)$
x_0	f_0				
x_1	f_1	∇f_1			
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_{x2}$	$\nabla^3 f_{x3}$	
x_3	f_3	∇f_3	$\nabla^2 f_{x3}$		$\nabla^4 f_{x4}$
x_4	f_4	∇f_4	$\nabla^3 f_{x4}$	$\nabla^3 f_{x4}$	

MERKEZİ FARK TABLOSU

x_i	$f(x_i)$	$\delta f(x_i)$	$\delta^2 f(x_i)$	$\delta^3 f(x_i)$	$\delta^4 f(x_i)$
x_0	f_0				
x_1	f_1	δf_0			
x_2	f_2	δf_1	δf_0		
x_3	f_3	δf_2	δf_1	δf_0	
x_4	f_4	δf_3	δf_2	δf_1	δf_0

ÖRNEK

$F(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonu için $h=1$ ve $[-3,2]$ aralığında ileri ve geri fark tablolarını hazırlayınız.

x_i	$F(x_i)$	$\Delta f(i)$	$\Delta^2 f(i)$	$\Delta^3 f(i)$	$\Delta^4 f(i)$
-3	-18				
		16	-12		
-2	-2				
		4		6	
-1	2		-6		0
		-2		6	
0	0		0		0
		-2		6	
1	-2		6		
		4			
2	2				

Genelde n. dereceden bir polinomun n. dereceden farkı sabit bir sayıya eşittir.

Genel bir polinomu:

$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ şeklinde gösterirsek 3. dereceden bir polinom için 3. fark

$\Delta^3 P_3(x) = 6 a_0 h^3$ dür. $h=1$ ve $a_0 = 1$ için:

$\Delta^3 f(x) = 6 \cdot 1 \cdot 1^3 = 6$ dir. Fark tablosundada aynı sonuca ulaşılmıştır.

Aynı polinomun Geri Fark tablosu:

x_i	$f(i)$	$\nabla f(i)$	$\nabla^2 f(i)$	$\nabla^3 f(i)$	$\nabla^4 f(i)$
-3	-18				
		+16 ∇f_1			
-2	-2		-12		
		+4 ∇f_2		+6	
-1	2		-6		0
		-2 ∇f_3		+6	
0	0		0		0
		-2 ∇f_4		+6	
1	-2		6		
		+4 ∇f_5			
2	2				

Sonlu Fark Tablosunda Yanlışların Yayılması ;

Ayrık değerleri verilen $f(x)$ fonksiyonunda $f_3 = f(x_3)$ değerinde ε gibi bir hata olduğunu varsayalım. Bunu fark tablosunda şu şekilde gösterebiliriz.

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$	$\Delta^5 f(x_i)$
x_0	f_0					
		Δf_0				
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$			
		Δf_1		$\Delta^3 f_0 + \varepsilon$		
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1 + \varepsilon$		$\Delta^4 f_0 - 4\varepsilon$	
		$\Delta f_2 + \varepsilon$		$\Delta^3 f_1 - 3\varepsilon$		$\Delta^5 f_0 + 10\varepsilon$
x_3	$f_3 + \varepsilon$		$\Delta^2 f_2 - 2\varepsilon$		$\Delta^4 f_1 + 6\varepsilon$	
		$\Delta f_3 - \varepsilon$		$\Delta^3 f_2 + 3\varepsilon$		$\Delta^5 f_1 - 10\varepsilon$
x_4	f_4		$\Delta^2 f_3 + \varepsilon$		$\Delta^4 f_2 - 4\varepsilon$	
		Δf_4		$\Delta^3 f_3 - \varepsilon$		
x_5	f_5		$\Delta^2 f_4$			
		Δf_5				
x_6	f_6					

$\Delta^6 f(x_i)$

$\Delta^6 f_0 - 20\varepsilon$

Sonlu fark tablosu incelendiğinde ;

$[-\varepsilon]$ değerlerinin önündeki katsayıların Binom katsayıları olduğu

En büyük yanlışın başlangıçta yanlış olan değerle aynı hizada olduğu görülür.