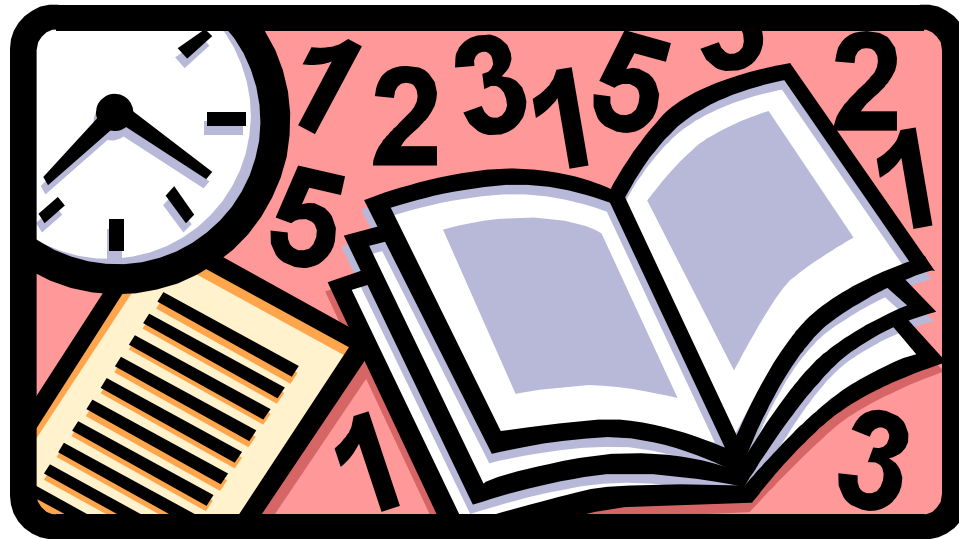


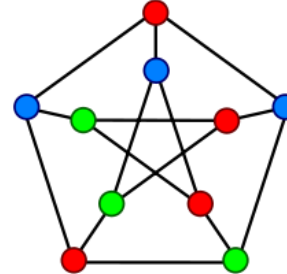
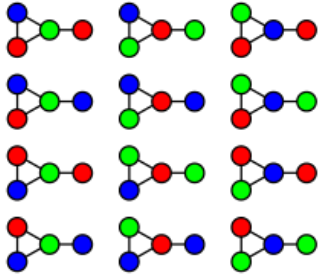
Graf Boyama (Grap Coloring) Kromatic Polinomlar (Chromatic Polynomial)



Graf Boyama

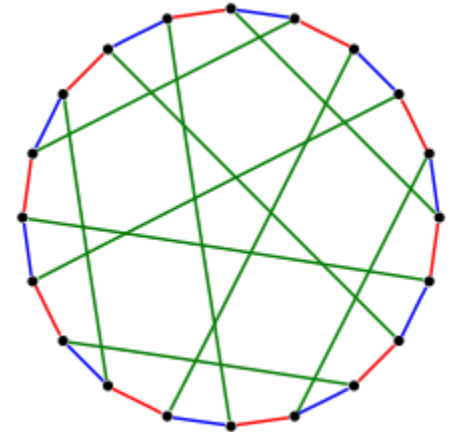
- **Düğüm / Köşe / Vertex / Node Boyama**

Düğüm boyama birbirine komşu iki düğümün farklı renklerle boyanması problemidir.



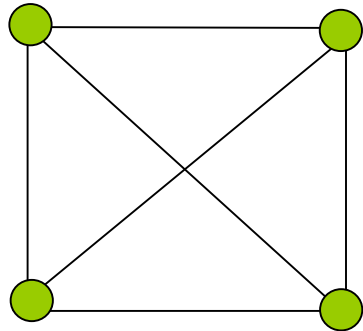
- **Kenar / Edge Boyama**

Kenar boyama birbirine komşu iki kenarın farklı renklerle boyanması problemidir.



Tanım

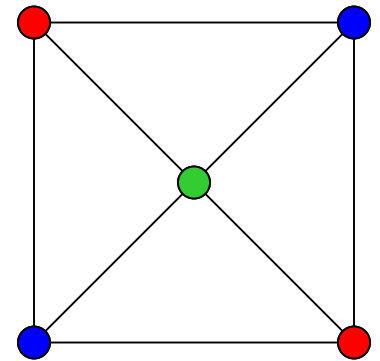
- ❖ Bir **G** grafının herhangi iki komşu düğümüne aynı renk atanmayacak şekilde, grafın her bir düğümüne bir renk atanmasına bir grafın **renklendirilmesi** denir.
- ❖ Bir grafın **renk** (kromatik) sayısı, grafın renklendirilmesi için gerekli olan **en az renk** sayısıdır. Bir **G** grafının renk (kromatik) sayısı $X(G)$ ile gösterilir.



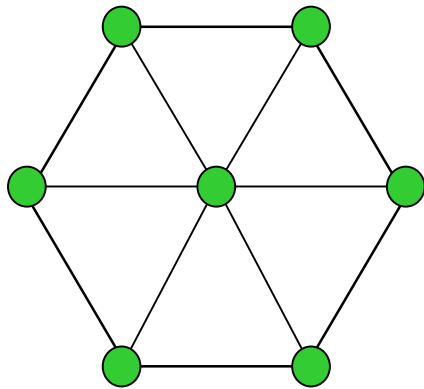
Grafın renk (kromatik) sayısı kaçtır?

$X(G) = 3$ renk mi?

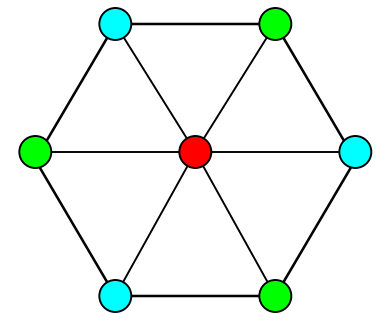
$X(G) = 4$ renk mi?



$X(G) = 3$



Grafın renk (kromatik) sayısı kaçtır?



$X(G) = 3$

Örnek

- Bir üniversite içerisinde profesör ünvanlı akademisyenlerden oluşan 10 tane kurul olsun
- Bu kurullar haftada bir kez toplanmaktadır
- Bir akademisyen birden fazla kurulda görev alabilir
- Tüm toplantıların en kısa sürede tamamlanması ve akademisyenlerin katılacağı toplantılarda çakışma olmaması istenmektedir

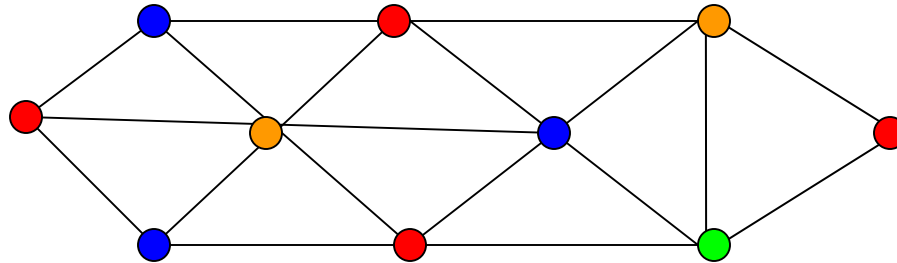
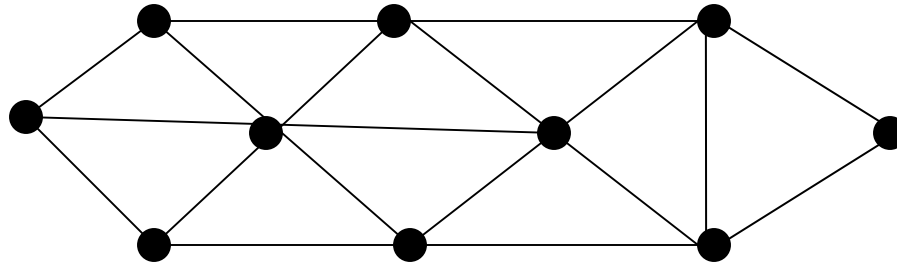
Kaç farklı toplantı oluşturulmalıdır?

Düğümler = Kurullar

Kenarlar = Çakışan akademisyenler

Renkler = Farklı toplantı zamanları

Grafımız aşağıdaki şekildeki gibi olsun.



$$X(G)=4$$

Kromatik Polinomlar

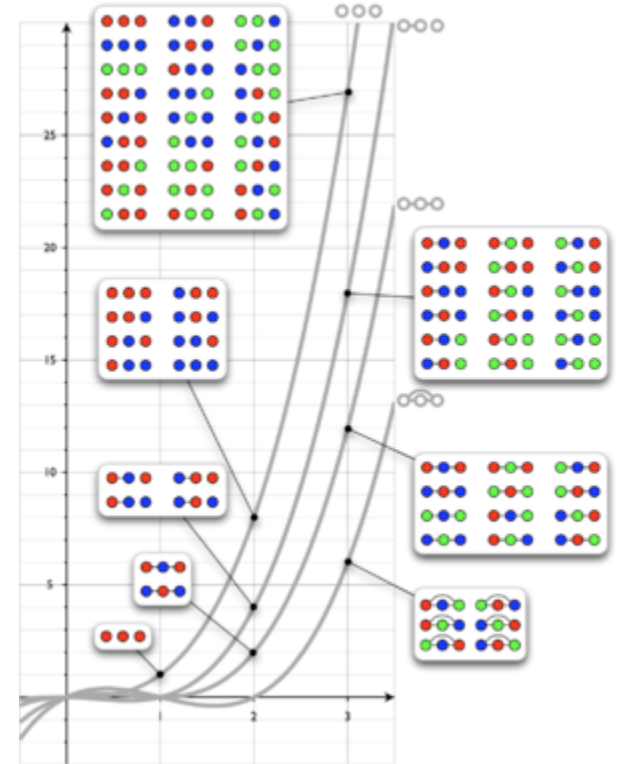
- **Bir G grafına ait köşelerin mümkün olan en az sayıda renkle boyanması için kullanılan analitik çözümlerdir.**
- Herhangi bir $k \geq 0$ tamsayısında değerlendirilen bir $P(G, x)$ grafın polinomu olan $P(G, k)$; G.'nin kromatik polinomu olarak adlandırılır.
- Elde edilen kromatik polinoma göre k değeri $P(G, k)$ polinomunun değerini $P(G, k) > 0$ yapmalıdır.

Bu değerlere göre;

$$X(G) = \min \{ k \text{ is } \mathbb{N} : P(G, k) > 0 \}$$

İçin

$X(G)$, en küçük k değeri için elde dileyek sonuca göre boyamada kullanılacak en az renk sayısını verecektir.

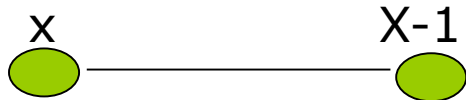


Tanımlar...

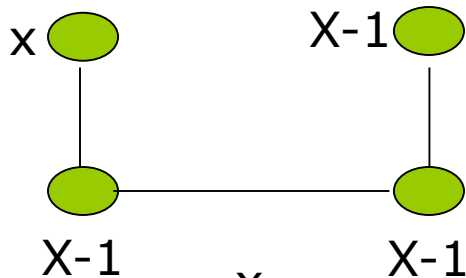


Noktasal Graf

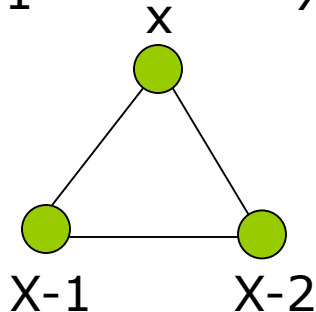
$$P(G, x) = x$$



Çizgisel Graf $P(G, x) = x \cdot (x-1)$



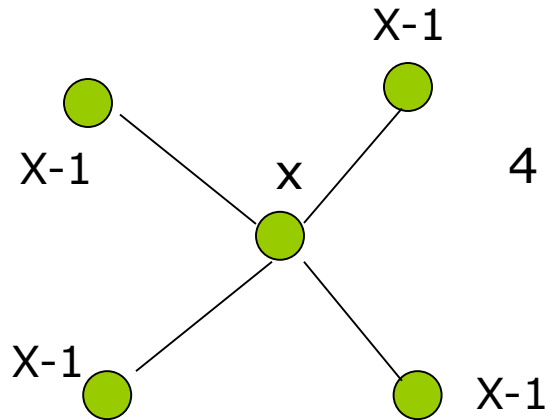
U grafi $\longrightarrow U_n = x(x-1)^{n-1}$



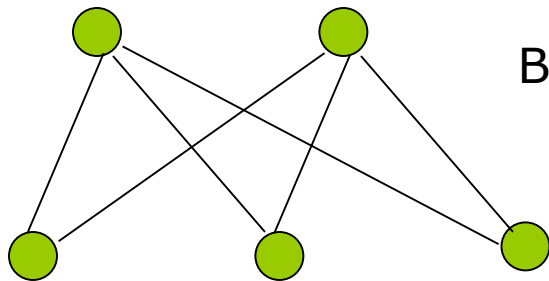
Z Grafi veya K
Grafi

$$K_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x - k)$$

Tanımlar...



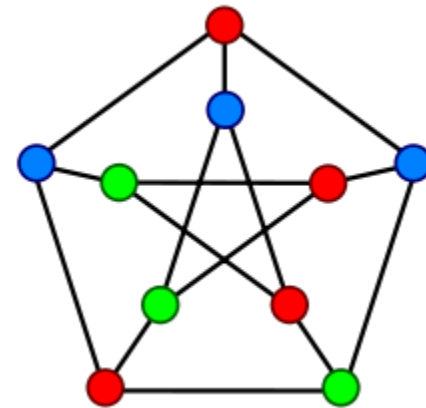
4 - Star Graf $\rightarrow \mathbf{P(G,x) = x \cdot (x-1)^4}$



Bipartite Graf $\rightarrow \mathbf{x = 2 \text{ renk}}$

Tanımlar...

Petersen Graph



Chromatic polynomials for certain graphs

Triangle K_3	$x(x-1)(x-2)$
Complete graph K_n	$x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))$
Edgeless graph \overline{K}_n	x^n
Path graph P_n	$x(x-1)^{n-1}$
Any tree on n vertices	$x(x-1)^{n-1}$
Cycle C_n	$(x-1)^n + (-1)^n(x-1)$
Petersen graph	$x(x-1)(x-2)(x^7 - 12x^6 + 67x^5 - 230x^4 + 529x^3 - 814x^2 + 775x - 352)$

Deletion and Contraction

Bir G grafının kromatik polinomu bulunurken temel graflar cinsinden yazmak karmaşık graflarda çok kullanılan bir çözümdür. Bu işlemi yaparken kenar silme veya ortak düğüm bulma işlemleri gerçekleştirilir. Bir grafta u ile v köşeleri için;

G/uv : Bir graftan u ve v köşelerinin birleştirilmesi veya aralarındaki kenarın çıkarılması ile elde edilen yeni bir graftır.

$G - uv$: Bir graftan uv kenarının çıkarılması ile elde edilen yeni graftır.

Bu duruma göre

u ve v G grafında bitişikse, uv kenarını kaldırarak elde edilen grafiği kromatik polinomu aşağıdaki gibi hesaplanır

$$P(G, k) = P(G - uv, k) - P(G / uv, k)$$

Kromatik Polinomlar

Bir G grafının kromatik polinomu $\mathbf{P(G)}$, G grafını minimum k renkle renklendirmenin kaç farklı şekilde yapılacağını verir.

Deletion Contraction Method

$$P_k(G) = P_k(G - e) - P_k(G \setminus e)$$

kenarı silme

Silinen kenara ait düğümleri
birleştirme

Kromatik Polinom özellikleri

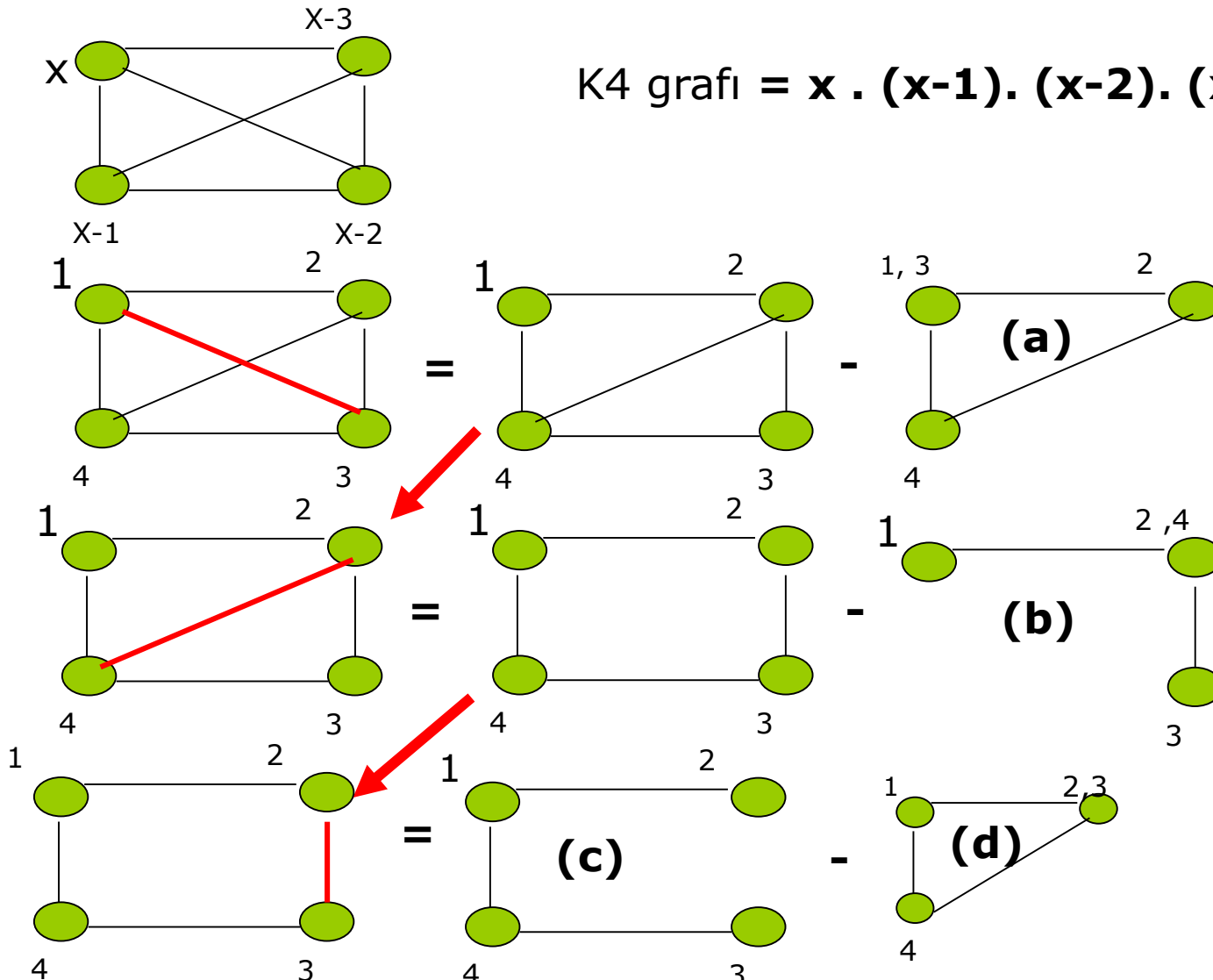
Elde edilen kromatik polinom aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır.

$$P(x) = a_0X^n - a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \dots + a_nX^0$$

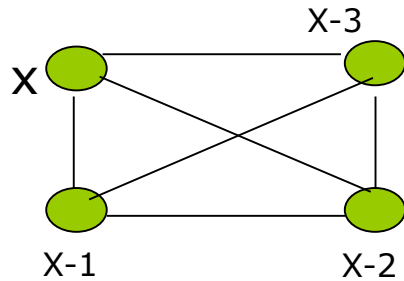
- 1- En yüksek dereceli terim $a_0 = 1$ olmalıdır
- 2- Polinomun derecesi olan n düğüm sayısını vermelidir
- 3- Polinomun 2. büyük teriminin katsayısını kenar sayısını vermelidir
- 4- Polinom katsayıları $+, -, +, -, \dots$ düzeninde pozitif ve negatif şeklinde olmalıdır
- 5- Polinomda sabit terim olmamalıdır. $P(0) = 0$

Örnek Soru:

$$K_4 \text{ grafi} = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$$



Örnek Soru-devam:

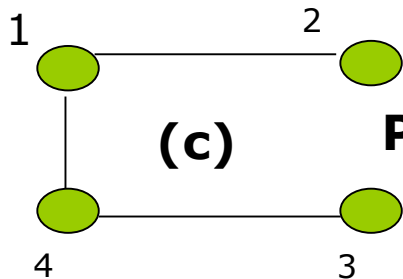


$$K4 \text{ grafi} = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$$

$$P(x) = P_c(x) - P_d(x) - P_b(x) - P_a(x)$$

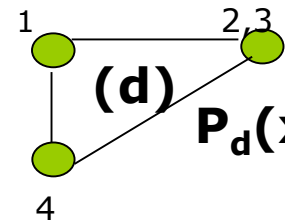
$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

Polinom özelliklerini kontrol edelim!



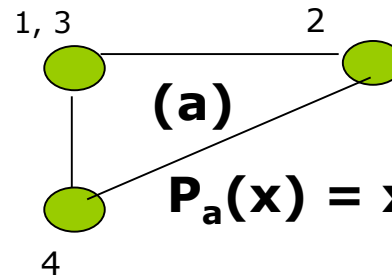
(c)

$$P_c(x) = x \cdot (x-1)^3$$



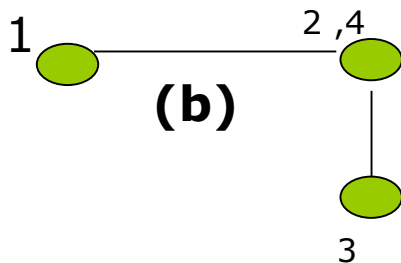
(d)

$$P_d(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$



(a)

$$P_a(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$

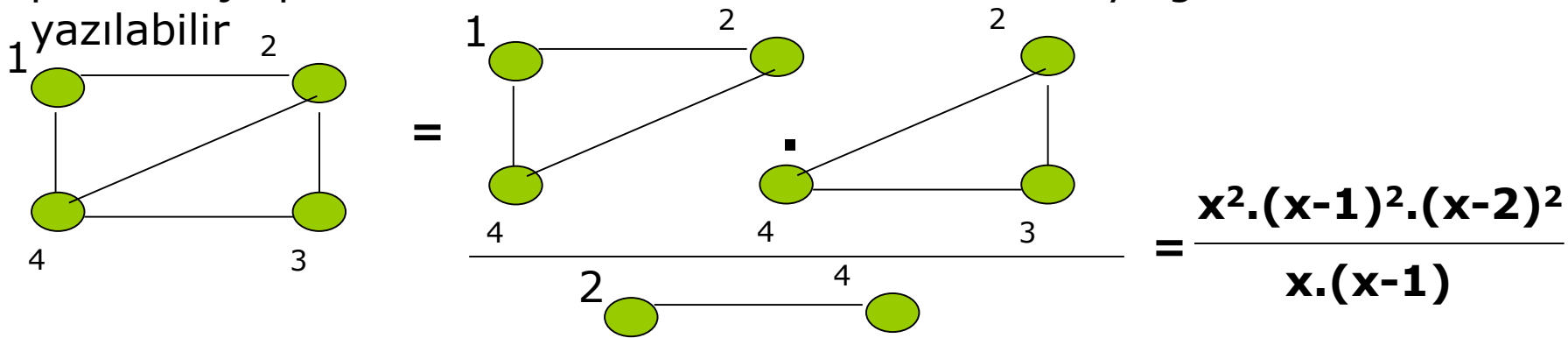


(b)

$$P_b(x) = x \cdot (x-1)^2$$

Örnek Soru-2 (Ortak Nokta)

Eğer bir graf, noktasal veya çizgisel bir graf ile ayrılırsa, kromatik polinom çarpım ve bölüm cinsinden bu ortak noktaya göre yazılabilir



$$G(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x$$

$G(x) = x^4$ (4 düğüm) , $5x^3$ (5 kenar) , katsayılar doğru, sabit terim yok

En az kaç renk? En az renkle kaç farklı şekilde boyama yapılır?

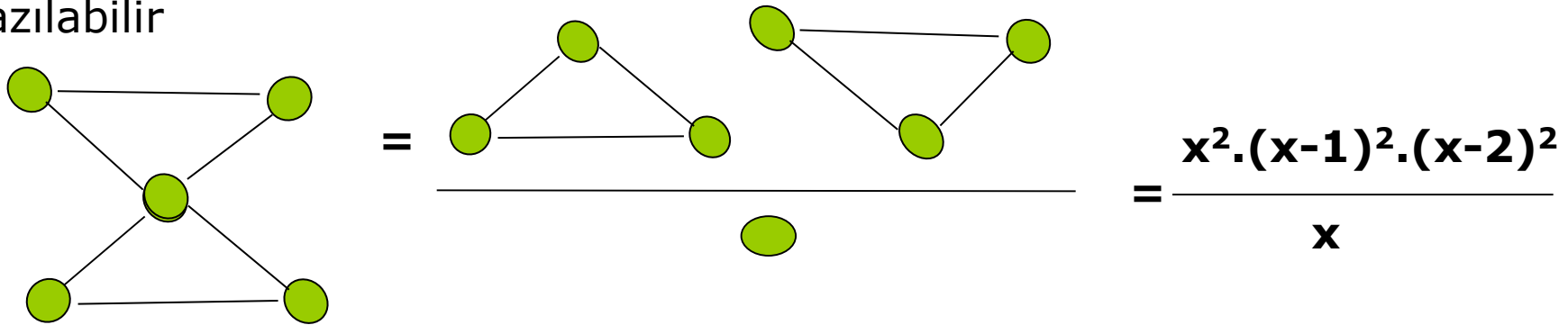
$G(P, k) > 0$ şartını k bulalım,

$$G(0) = G(1) = G(2) = 0, G(3) = 6$$

\therefore min 3 renkle, 6 farklı şekilde boyama yapılabilir

Örnek Soru-3 (Ortak Nokta)

Eğer bir graf, noktasal veya çizgisel bir graf ile ayrılırsa, kromatik polinom çarpım ve bölüm cinsinden bu ortak noktaya göre yazılabilir



$$G(x) = x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 4x$$

$G(x) = x^5$ (5 düğüm) , $6x^3$ (6 kenar) , katsayılar doğru, sabit terim yok

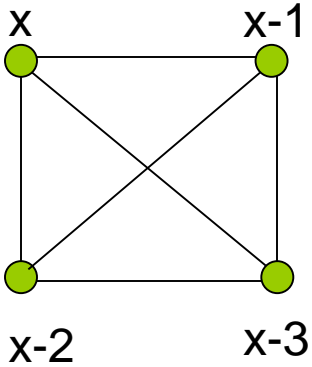
En az kaç renk? En az renkle kaç farklı şekilde boyama yapılır?

$G(P, k) > 0$ şartını k bulalım,

$$G(0) = G(1) = G(2) = 0, G(3) = 12$$

\therefore min 3 renkle, 12 farklı şekilde boyama yapılabilir

Örnek



K grafi olup, bütün düğümler birbiri ile bağlantılıdır.

$$K_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x - k)$$

$$\begin{aligned} K_4 &= x(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= (x^2 - x)(x^2 - 5x + 6) \\ &= 1x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \end{aligned}$$

$x=1$ için değeri

0

$x=2$ için değeri

0

$x=3$ için değeri

0

$x=4$ için değeri

24

1 5 6

1 1

1 5 6

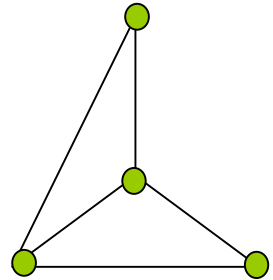
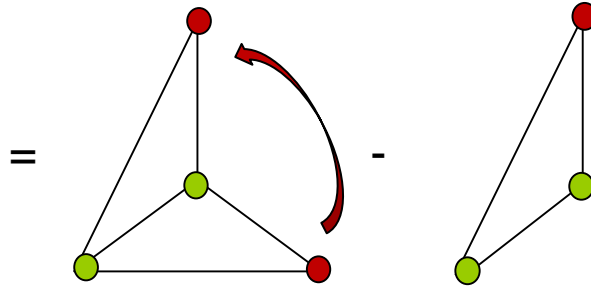
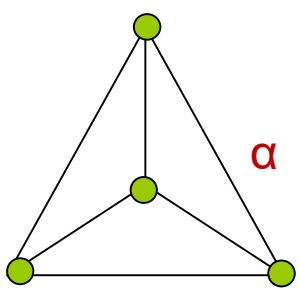
1 5 6

+-----

1 6 11 6

4 farklı renk ile 24 farklı şekilde boyanır

Örnek



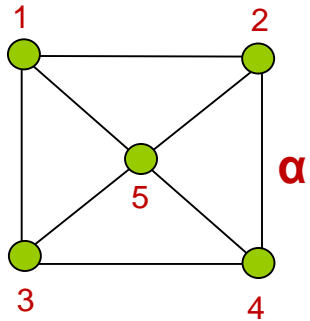
$$= \frac{\text{[Diagram of K4 with one edge removed]} \times \text{[Diagram of K3]} - \text{[Diagram of K2]} \times \text{[Diagram of K2]}}{x(x-1)} = \frac{x^2(x-1)^2(x-2)^2}{x(x-1)}$$

$$= x(x-1)(x-2)^2 - x(x-1)(x-2) \\ x(x-1)(x-2)[(x-2) - 1] \\ x(x-1)(x-2)(x-3) \\ (x^2-x)(x^2-5x+6) \\ x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

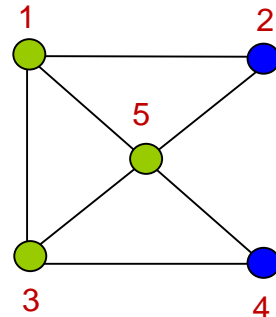
K_4 grafi 4 renk ile 24 farklı şekilde boyanır

Örnek

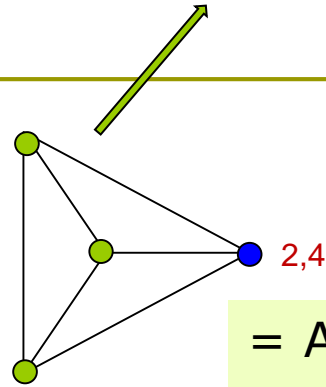
$$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$



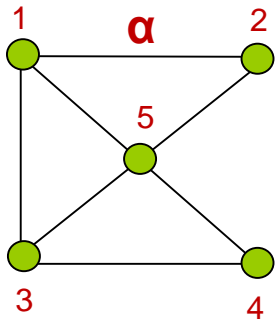
=



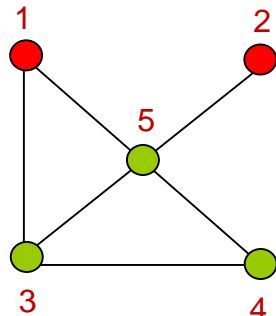
-



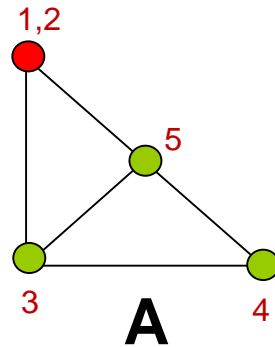
$$= A(x-2) - (x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x - x^5 + 8x^4 - 24x^3 + 31x^2 - 14x)$$



=



-

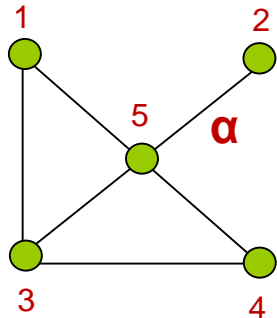


$$= A(x-1) - A$$

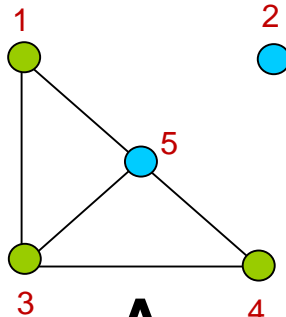
$$Ax - A - A$$

$$Ax - 2A$$

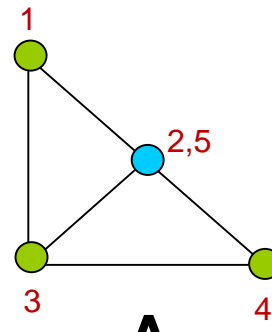
$$A(x-2)$$



=

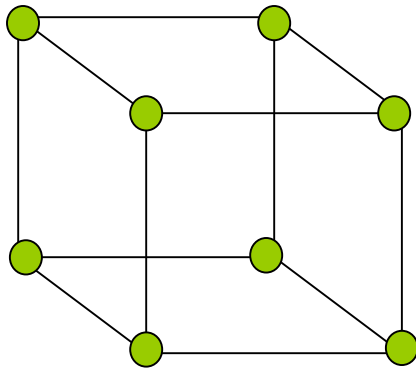


-



$$= A(x-1)$$

Örnek



Minimum kaç renk ile boyanabilir ?

$$x^8 - 12x^7 + 66x^6 - 208x^5 + 325x^4 - 131x^3 + 90x^2 - 131x$$