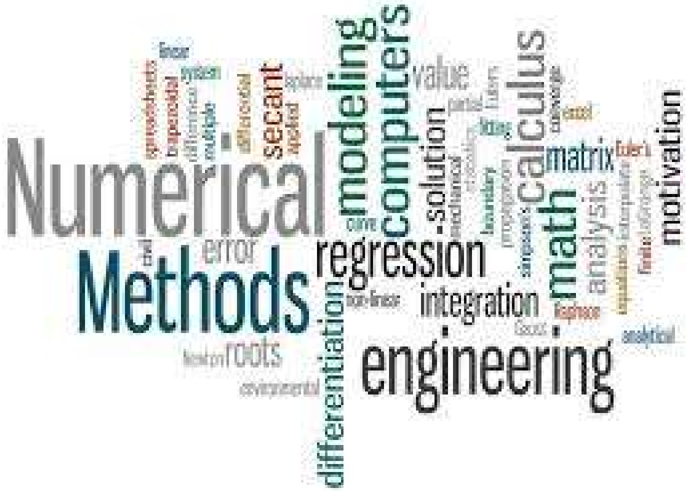
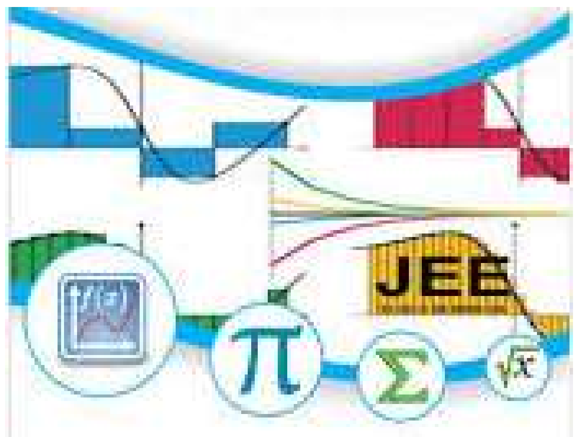


SAYISAL ANALİZ



Yıldız Teknik Üniversitesi- Banu Diri

KAYNAKLAR

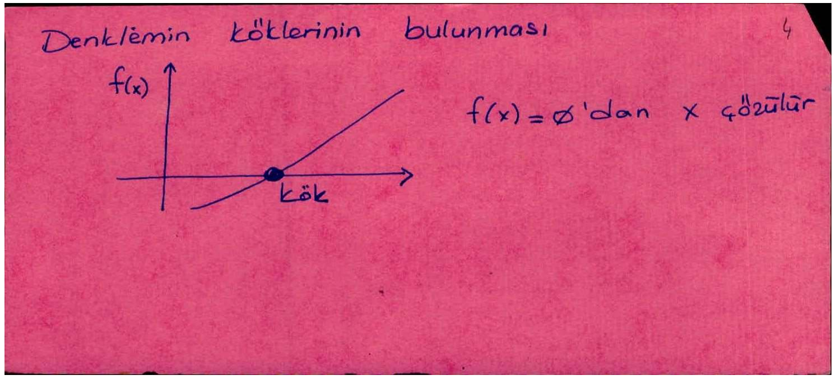
- Numerical Methods forMathematics, Science and Engineering
  John H. Mathews, Prentice Hall
- Numerical Methods, Software and Analysis
  John R. Rice, Mc. Graw Hill

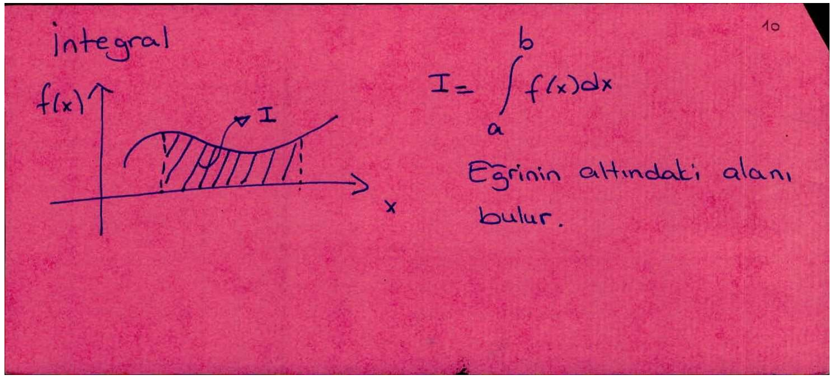
Değerlendirme

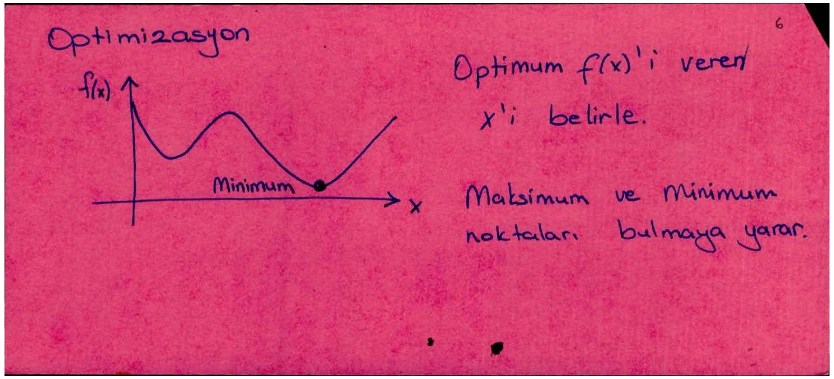
- ✓ 2 adet Vize %30
- ✓ x adet quizz %10
- ✓ Proje %20 (sizden istenen yöntemler kodlanacak, son iki hafta projeler online olarak sunulacak)
- ✓ Final %40

KONULAR

- Sayısal Analiz Nedir?
- Nümerik Hesaplamalar ve Hatalar
  - kesme, bağıl, mutlak, yuvarlama
- Doğrusal (Lineer) Olmayan Eşitliklerin Çözümü
  - Açık Yöntemler
    - Newton-Raphson
    - Basit İterasyon
    - Sekant (Kiriş)
  - Kapalı Yöntemler
    - Grafik Yöntemi
    - Aralık Yarılama (Bisection)
    - Regula-Falsi (False Position / Yanlış Nokta)
- Sayısal İntegral
  - Trapez (Yamuklar)
  - Simpson
  - Çift Katlı İntegraller
- Sayısal Türev



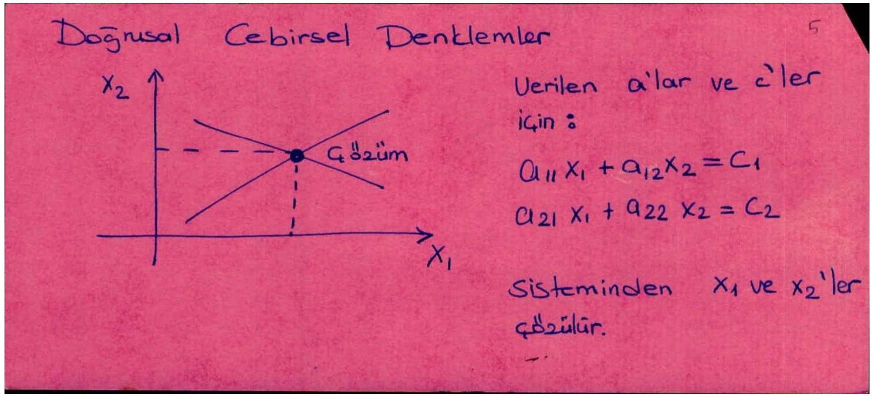




- Matrisler

  Matris Tanımı, Alt / Üst Üçgen Matrisler / Birim / Köşegen / Bant Matris

  Matris Transpozesi, Determinant, Tersi (inverse) Alma



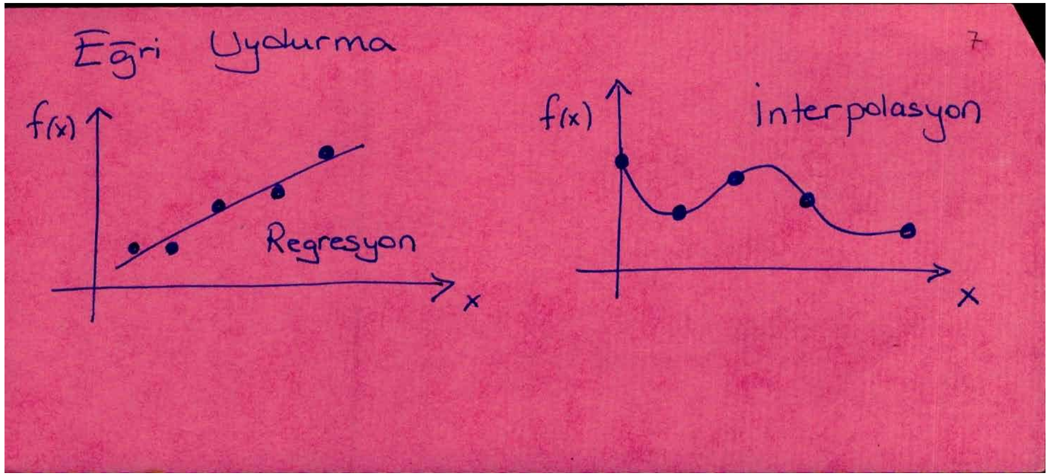
- Doğrusal Sistemlerin Çözümü
  - Dolaysız (Direct) Yöntemler
    - Cramer
    - Gauss Elimination Yöntemi
    - Gauss Jordan Elimination Yöntemi
    - Yoğunlaştırılmış Yok etme (Compact Elimination): Cholesky yöntemi
  - Dolaylı (Indirect) Yöntemler
    - Jacobi iterasyonu
    - Gauss-Seidal

- Lineer Olmayan (2 ya da 3 değişkenli) Denklem Takımlarının Çözümü
  - Taylor Serisi açılımı (kısmi türev) yaklaşımı
- Sonlu Farklar
  - İleri / Geri / Merkezi Farklar,
  - Birinci / İkinci / Üçüncü … Dereceden İleri / Geri / Merkezi Farklar
  - Sonlu Fark Tabloları (İleri / Geri / Merkezi Fark için)

- Eğri Uydurma

Enterpolasyon

- Gregory-Newton Enterpolasyon Formülleri
- Lagrange Enterpolasyon Formülleri



Regresyon: Sayısal Yaklaşım Yöntemleri

- En Küçük Kareler Yaklaşımı
- En Küçük Karelerde Polinom Yaklaşımı
- En Küçük Karelerde Lineer Olmayan Fonksiyonların Kullanımı (üstel modeller)
- En Küçük Karelerde Trigonometrik Fonksiyonların Kullanımı

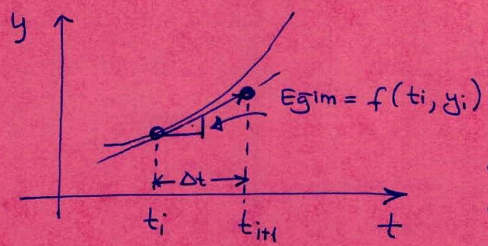
Enterpolasyon: Hatasız veri noktalarının arasında kalan ara noktaları belirlemek için kullanılır. Tablo halinde verilen bilgiler için geçerlidir. Veri noktalarından doğrudan geçen bir eğri uydurmak ve bu eğriyi kullanarak ara değerleri tahmin etmektir.

Regresyon : Veriler ile ilgili belirgin bir hata söz konusu ise regresyon uygulanır. Deneysel sonuçlar bu tipe girer. Veri noktalarının genel eğilimini gösteren ve herhangi bir noktadan özellikle geçmesi gerekmeyen tek bir eğri bulmaktır.

- Adi Diferansiyel

11

Adi Diferansiyel Denklemler



Verilen

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = f(t,y)$$

denklemini t'nin fonksiyonu olarak y için çöz.

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\Delta t$$

Sayısal Analiz Nedir?

Bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeler ve bilgisayarın pratikte mühendisliğe uygunluğu birçok yönden mühendislik eğitimini etkilemiştir.

Geniş çapta matematik problemlerinin ve mühendislik sistemlerinin çözümü için kullanılan metotlar topluluğudur.

Fiziksel bir sistemin matematiksel gösterilimini sağlamaktır.

- Güçlü problem çözme aracıdır.
- Analitik yollardan çözülmesi imkansız olan denklem sistemlerinin çözümünde kullanılır.
- Birçok probleme hazır programlarla yaklaşılamaz, problemimizi çözecek programı kendimiz yazabiliriz.

Sayısal yöntemler, yüksek matematiği basit aritmetik işlemlere indirger.

Mühendislik problemlerinin çözümünde iki yol kullanılır.

Analitik (Teori) – Sonuçlar süreklidir
Sayısal (Deneysel) – Sonuçlar kesiklidir

Analitik	Sayısal
• Matematiksel fonksiyonlar olarak çözüm üretirler, daha sonra bu çözümler bazı veriler için sayısal değere dönüştürülür • Karışık olmayan problemlerin çözümünde kullanılır • Tek ve kesin bir sonuç elde edilir	• Analitik çözümü olmayan (karışık) problemlerin çözümünde kullanılır • Sonuçlar daima sayısaldır • Yaklaşık çözüme ulaşmak için iteratif bir çözüm kullanılır • Yaklaşık bir çözüm üretirler, bu yaklaşık çözümlerin hassasiyeti adım sayısı artırılarak sağlanır • Problemin çözümü yaklaşık olarak bulunduğunda hata analizi yapılır

Mühendislikte en fazla ihtiyaç duyulan bir fonksiyonun minimum veya maksimum noktasının bulunmasıdır.

Analitik Yaklaşımda fonksiyonun türevi alınır ve sıfıra eşitlenir.

$$y = x^2 - 3x + 2$$

$$y' = 2x - 3$$

$$2x - 3 = 0$$

$$x = 3/2 = 1.5$$

$x = 1.5$ $y = -0.25$

Nümerik yaklaşımda ise x'in belli aralık içinde olacağı tahmin edilir.

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y	0	-0.16	-0.24	-0.24	-0.16	0

X=1.5

Kısaca özetleyecek olursak

Analitik çözümü mümkün olmayan denklemlerin sayısal denemeler ile yaklaşık çözümlerinin bulunması işlemlerine **Sayısal Analiz** denir.

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$

$x=2$ $x=1$

Analitik çözümü mevcut

$x^2 -5x.Cosx + e^x = 0$

$x=1$ için -1.23

$X=0{,}5$ için -0,6

$x=0$ için 1

$\ln x + x^3 + \tan 2x = 0$

?????

Sayıların Gösterilimi

Base 10 (Decimal)
Base 2 (Binary)
Base 8 (Octal)
Base 16 (Hexadecimal)

Anlamlı (Significant) Dijit

Örnek : 5S

$$2/3 = 0,\overline{6} = 0,66667$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135 = 1,4142$$

Decimal Place (D)

Floating Point (significant = mantissa) (exponent)

işaret	İşaretli üs	mantis

üs

$$m.b^{e}$$

mantis

Kullanılan sayı sisteminin tabanı

$156,78 \rightarrow 0,15678*10^{3}$

$67,42 \rightarrow 0,6742 * 10^{2}$

$6,742 * 10^{1}$

$0,06742 * 10^{3}$

$0,00125 \rightarrow 0,125 * 10^{-2}$

$-5,026 * 10^{-17}$

$-50,26 * 10^{-18}$

$-0,5026 * 10^{-16}$

Chopping (Round / Trunc) Dijit Sayısını Azaltmak

π = 3,141592654

$$\left.\begin{array}{l}\pi \text{ trunc to four decimal places (4D)} \rightarrow 3{,}1415 \\ \pi \text{ round to four decimal places (4D)} \rightarrow 3{,}1416\end{array}\right\} 5S$$

Round_off error $3{,}1415 - 3{,}1416 = -1 * 10^{-4}$

	trunc		**round**	
	3S	3D	3S	3D
34,78219				
3,478219				
0,3478219				
0,03478219				

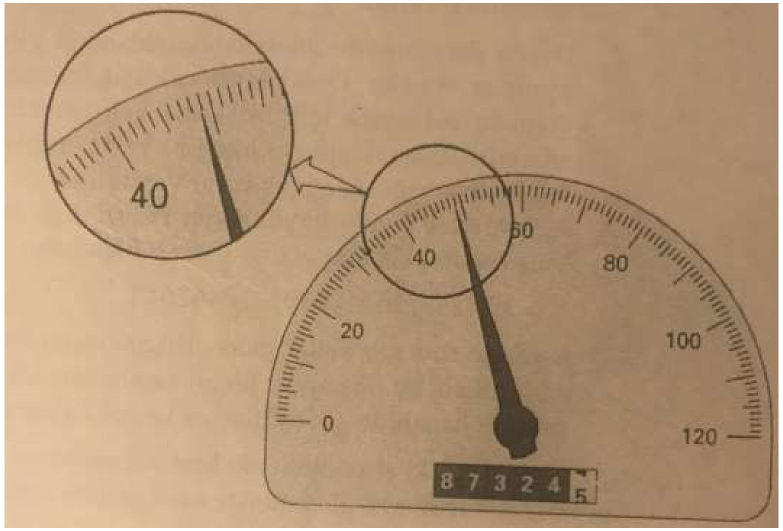
	trunc		**round**	
	3S	3D	3S	3D
34,78219	34,7	34,782	34,8	34,782
3,478219	3,47	3,478	3,48	3,478
0,3478219	0,347	0,347	0,348	0,348
0,03478219	0,034	0,034	0,035	0,035

Örnek : 12,35   0,080059   296,844   0,00519   sayılarının floating point olarak gösterilimi nedir ?

12,35 → $0,1235 * 10^{2}$ 0,080059 → $0,080059 * 10^{0}$ 296,844 → $0,296844 * 10^{3}$ 0,00519 → $0,519 * 10^{-2}$

Anlamlı Basamaklar

Bir hesapta sayı ile çalışıyorsak, bunun güvenle kullanılabileceğine dair garantimiz olmalıdır. Arabanın hız göstergesini örnek olarak verelim.



Cevap 49

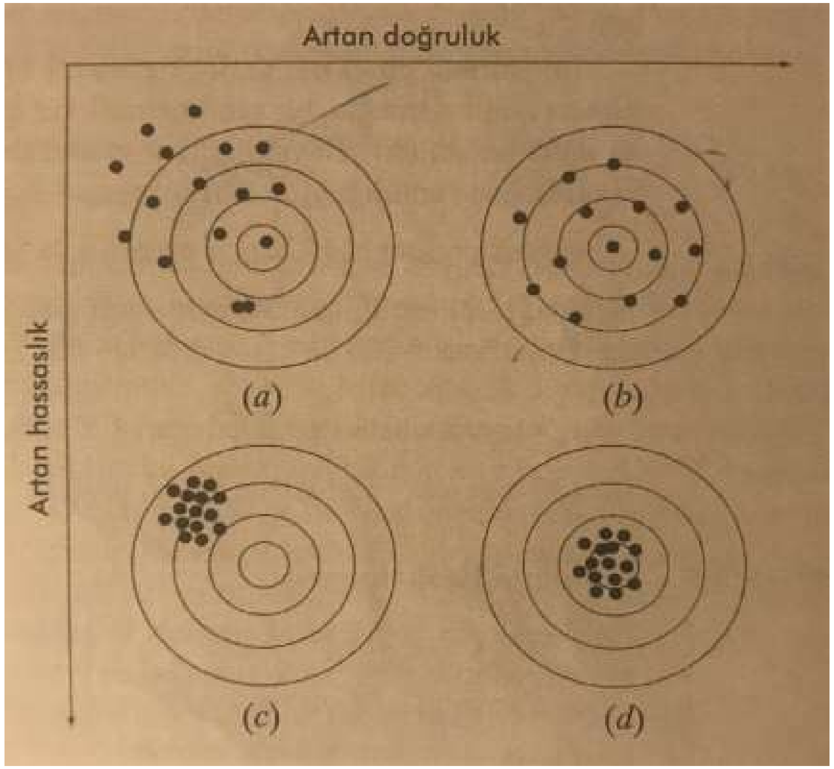
Noktadan sonrası ???

Anlamlı Basamak sayısal bir değerin güvenilirliğini resmen gösterebilmek için geliştirilmiştir. Bir sayının anlamlı basamakları güvenle kullanılacak olan basamaklardır.

Doğruluk ve Hassaslık

Doğruluk : Hesaplanan veya ölçülen değerin gerçek değere ne kadar uyduğunu ifade eder.

Hassaslık : Hesaplanan veya ölçülen değerlerin kendi aralarında ne kadar uyumlu olduklarını ifade eder.



(a)Yanlış ve Belirsiz
(b)Doğru ve Belirsiz
(c)Yanlış ve Hassas
(d)Doğru ve Hassas

Mistake (Yanlış) – Error (Hata)
Fark Nedir ?

Hata → X_g, X_h → error= $|X_g - X_h|$

Yanlış → 62238, 62328 dijitlerin yer değiştirmesi
62238, 62338 tekrar eden dijitlerin yanlış okunması
tabloların satır ve sütunlarının yanlış okunması
decimal point'in yanlış okunması

Floating Point İşlemler

Toplama ve Çıkarma

$$3,12 * 10^{1} + 4,26 * 10^{1} = 7,38 * 10^{1} \rightarrow 0,738 * 10^{2}$$

Çarpma

$$4,27 * 10^{1} \times 3,68 * 10^{2} = 15,7136 * 10^{3} \rightarrow 0,157136 * 10^{-5}$$

Bölme

$$4,27 * 10^{1} / 3,68 * 10^{2} = 1,1603 * 10^{-1} \rightarrow 0,11603$$

HATA KAVRAMI VE HATA ÇEŞİTLERİ

(Error)

$$\boxed{\text{Hata} = \text{Gerçek değer} - \text{Hesaplanan değer}}$$

$$f(x) = x^2$$

$x = 5$ için $f(5) = 5^2 = \boxed{25}$

$$f(5) = 5^2 = \boxed{10}$$

$$\text{Hata} = 25 - 10 = 15$$

Hata Çeşitleri

1. Hata çeşidi
Kesme Hatası
(Truncation Error)

2. Hata çeşidi
Bağıl Hata
(Relative Error)

3. Hata çeşidi
Mutlak Hata
(Absolute Error)

4. Hata çeşidi
Yuvarlama Hatası
(Rounding Error)

TAYLOR ve MACLAURIN SERİ AÇILIMLARI

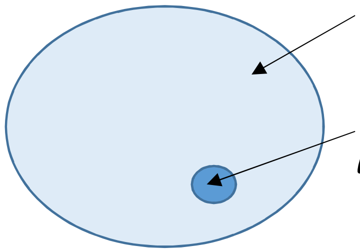
$f(x) \longrightarrow$ SONSUZ defa türevlenebilir ise $\longrightarrow$ SERİ haline getirirler.

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \longrightarrow \begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2x - 1 \\ f''(x) &= 6x + 2 \\ f'''(x) &= 6 \\ f^{(4)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = e^{2x} \longrightarrow \begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x} \\ f''(x) &= 4e^{2x} \end{aligned}$$

Seri haline getirilebilir

Bir fonksiyon, sonsuz defa türevlenebiliyorsa seri olarak açabiliyorsa, Taylor ve Maclaurin seri açılımları elde edilebilir.



Taylor açılımı f(x) fonksiyonunun $x=x_0$ noktasındaki seri açılımına Taylor

Maclaurin açılımı f(x) fonksiyonunun x=0 noktasındaki seri açılımına Maclaurin

Taylor Açılımı: $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0) + \frac{f''(x_0).(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0).(x-x_0)^3}{3!} + \cdots$$

Maclaurin açılımı $x = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0).x^2}{2!} + \frac{f'''(0).x^3}{3!} + \cdots$$

Soru: $f(x) = e^x$ in $x = 1$ noktasında taylor açılımının ilk dört terimini yazınız.

1. terim: $f(1) = e$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$f'''(x) = e^x$

2. terim: $f'(1).(x-1) = e(x-1)$

3. terim: $\dfrac{f''(1).(x-1)^2}{2!} = \dfrac{e(x-1)^2}{2}$

4. terim: $\dfrac{f'''(1).(x-1)^3}{3!} = \dfrac{e.(x-1)^3}{6}$

$$f(x) \cong e + e.(x-1) + \frac{e.(x-1)^2}{2} + \frac{e.(x-1)^3}{6}$$

Soru : f(x) = Cosx fonksiyonunun Maclaurin açılımının sıfırdan farklı ilk 3 terimini bulunuz.

Taylor açılımı için x=0 yapılmalıdır.

$f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x$

$f'''(x) = +\sin x$

$f^{(4)}(x) = \cos x$

1.terim : $f(0) = 1$

2.terim : $f'(0).(x-0) = 0.x = 0$

3.terim : $\dfrac{f''(0).(x-0)^2}{2!} = \dfrac{-1.x^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2}$

4.terim $\dfrac{f'''(0).(x-0)^3}{3!} = \dfrac{0.x^3}{6} = 0$

5.terim $\dfrac{f^{(4)}(0).(x-0)^4}{4!} = \dfrac{1.x^4}{24} = \dfrac{x^4}{24}$

5.t

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots\cdots$$

3.derece Taylor polinomu $\longrightarrow$ x^3'lüye kadar açılım yapılcak.

4.derece " " $\longrightarrow$ x^4 " " "

Taylor ve Maclaurin Serilerini Bulma

Taylor Seri Formülü

$f(x)$ = sonsuz defa türevlenebilen $\quad x = x_0$ noktasında

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n} = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0)$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \cdots$$

Maclaurin Seri formülü   x=0 da Taylor seri formülü

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots$$

SORU: $f(x) = e^x$ fonksiyonunun $x=4$ noktasında taylor serisini bulunuz.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(4)}{n!} \cdot (x-4)^n}$$

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = e^x \longrightarrow f^n(4) = e^4$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^4 \cdot (x-4)^n}{n!}$$

b) 2. dereceden taylor polinomunu yazınız. $n=2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{2} \frac{e^4 (x-4)^n}{n!}$

$$e^x = P_2(x) = e^4 + e^4.(x-4) + \frac{e^4.(x-4)^2}{2}$$

Soru: $f(x) = \frac{1}{x}$ in $x=2$ noktasındaki taylor serisini bulunuz.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2).(x-2)^n}{n!}}$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $(n=0)$ $(x^{-1})' = -x^{-2}$

$f'(x) = -x^{-2}$ $(n=1)$

$f''(x) = 2x^{-3}$ $(n=2)$

$f'''(x) = -6x^{-4}$ $(n=3)$ $(-1)^n$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^n . x^{-n-1} . n!$ $(n=n)$

$$\boxed{\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . 2^{-n-1} . (x-2)^n}$$

Soru: $f(x) = e^{2x}$ in maclorin serisi ~~açılımı~~ nedir?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^{n}$$

$$f(x) = e^{2x} \quad (n=0)$$

$$f'(x) = 2e^{2x} \quad (n=1)$$

$$f''(x) = 4e^{2x} \quad (n=2)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 2^{n} \cdot e^{2x} \quad (n=n)$$

$$f^{n}(0) = 2^{n}$$

$$\boxed{e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n} \cdot x^{n}}{n!}} \quad ☆$$

Kesme Hatası

Bir değerin hesaplanabilmesi için sonsuz sayıda terim alınması gerekirken sonlu sayıda terim alınıyorsa oluşan hataya kesme hatası denir. Eklenen her yeni terim sonucu değiştirir ama bu değişim çok az olduğu için göz ardı edilir.

Taylor serisi, bir fonksiyonun herhangi bir x noktasındaki değerini, fonksiyonun ve türevlerinin o x noktasındaki değerleri cinsinden tahmin edilmesine olanak sağlar.

(x = 0 daki taylordır.)

Soru: $f(x) = e^x$ in maclaurin seri açılımını yapınız.

1. terim: $f(0) = 1$ 2. terim: $f'(0) . x = x$ 3. terim: $\frac{1 . x^2}{2!} = \frac{x^2}{2}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

Ör: $e^{1,5}$ değerini 3. dereceden maclorin seri açılımını yaparak hesaplayınız.

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}} + \underbrace{\frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots\cdots}_{\text{Kesme Hatası}}$$

$$e^{1,5} \cong 1 + 1,5 + \frac{(1,5)^2}{2} + \frac{(1,5)^3}{6} = 2,5 + 1,125 + 0,5625 = \underline{4,1875}$$

Kesme hatası = ($e^{1,5}$ un gerçek değeri) − (3. dereceden maclorin açılımı ile hesaplanan değer)

$$= 4,48168907 - 4,1875 = \boxed{0,29418907}$$

Soru : Verilen f(x) fonksiyonu x=0 dan başlayarak ve h=1 ($x_{i+1}=x_i+h$) alarak f(1) değerini dördüncü dereceye kadar Taylor seri açılımını kullanarak yaklaşık olarak hesaplayınız.

$$f(x) = -0{,}1\,x^4 - 0{,}15\,x^3 - 0{,}5\,x^2 - 0{,}25\,x + 1{,}2$$

$f(0) = 1{,}2$ $\quad$ $f(1) = 0{,}2$

$f(1) \approx f(0) = \mathbf{1{,}2}$

0.dereceden

$f(1) \approx f(0) + f'(0)*x = 1{,}2\ \mathbf{-0{,}25}\ x$

$f(1) \approx f(0) + f'(0)*x = 1{,}2\ \mathbf{-0{,}25}\ x = \mathbf{0{,}95}$

1.dereceden

$f'(0) = -0{,}4x^3 - 0{,}45x^2 - x - 0{,}25 = \mathbf{-0{,}25}$

$f(1) \approx f(0) + f'(0)*x + (f''(0)*\ x^2)/2! = 1{,}2 - 0{,}25\ x$

$f(1) \approx f(0) + f'(0)*x + (f''(0)*\ x^2)/2! = 1{,}2 - 0{,}25\ x\ \mathbf{-\ 0{,}5}\ x^2 = \mathbf{0{,}45}$

2.dereceden

$f''(0) = -1{,}2x^2 - 0{,}90x - 1 = \mathbf{-1}$

$f(1) \approx f(0) + f'(0)*x + (f''(0)*x^2)/2! + (f'''(0)*x^3)/3! = 1{,}2 - 0{,}25\,x - 0{,}5\,x^2$

3.dereceden

$f'''(0) = -2{,}4x - 0{,}90 = \mathbf{-0{,}9}$

$f(1) \approx f(0) + f'(0)*x + (f''(0)*x^2)/2! + (f'''(0)*x^3)/3! = 1{,}2 - 0{,}25\,x - 0{,}5\,x^2 \mathbf{- 0{,}15}\,x^3 = \mathbf{0{,}3}$

$f(1) \approx f(0) + f'(0)*x + (f''(0)*x^2)/2! + (f'''(0)*x^3)/3! + (f^{(4)}(0)*x^4)/4! = 1{,}2 - 0{,}25\,x - 0{,}5\,x^2 - 0{,}15\,x^3$

4.dereceden

$f^{(4)}(0) = -2{,}4 = \mathbf{-2{,}4}$

$f(1) \approx f(0) + f'(0)*x + (f''(0)*x^2)/2! + (f'''(0)*x^3)/3! + (f^{(4)}(0)*x^4)/4! =$

$1{,}2 - 0{,}25\,x - 0{,}5\,x^2 - 0{,}15\,x^3 \mathbf{- 0{,}1}\,x^4 = \mathbf{0{,}2}$

Gerçek f(1) = 0,2

Kesme hatalı f(1) = 0,2

Kesme Hatası = 0,2 -0,2 = 0

Soru : Cos(∏/5) in değerini dördüncü dereceden Maclaurin seri açılımı ile hesaplayınız ve kesme hatasını bulunuz.

$f(x) = \cos x$ ve $x = 0$ da

$f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x$

$f'''(x) = \sin x$

$f^{(4)} = \cos x$

$$\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

1. terim : $f(0) = 1$

2. terim : $f'(0)\,(x-0) = 0$

Kesme hatası = gerçek değer − seriden kesilerek elde edilen değer.

$$= 0{,}809016994 - 0{,}809288 \doteq -0{,}000271$$

$$\frac{f'''(0).(x-0)^3}{3!} = 0$$

5. terim $\dfrac{f^{(4)}(0).(x-0)^4}{4!} = \dfrac{x^4}{24}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \cong 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^4}{24} = 1 - 0{,}197192 + 0{,}00648$$

$$= 0{,}809288$$

BAĞIL HATA
(Relative Error)

Gerçek değer ve hesaplanan değer biliniyorsa:

$$\boxed{\text{Bağıl Hata} = \frac{\text{Gerçek değer} - \text{Hesaplanan değer}}{\text{Gerçek değer}}}$$

Bağıl hatanın küçük olması hedeflenir

Ör: $f(x) = x^3$, $f(2) = 2^3 = 8$ gerçek değer. verilmiş olsun.

$f(2) = 2^3 = 6$ hesaplanan değer

Bağıl hata $= \dfrac{8-6}{8} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} = 0,25 \Rightarrow$ %25 hata var.

Soru: e sayısının yaklaşık değeri 2,718 olarak kullanılmaktadır. Bu yaklaşık değer hesabındaki bağıl hata nedir?

Bağıl hata = (e-2,718)/e = 1,036 10^{-4}

Bağıl hatada hesaplanan değerin mertebesi önemlidir.
1 cm lik bir hata, 100 m için önemsiz iken 10 cm için önemlidir.

Soru : Bir köprü ve perçinin uzunluklarını ölçmek ile görevlendirildiğinizi ve bunları sırası ile 9.999 cm ve 9 cm olarak ölçtüğünüzü kabul edin. Gerçek değerler de sırası ile 10.000 cm ve 10 cm ise, her iki durum için a) geçek hatayı ve b) bağıl hatayı yüzdesel olarak hesaplayınız.

a) Köprü için e_g = 10.000 – 9.999 = 1 cm
Perçin için e_g = 10 – 9 = 1 cm

b) Köprü için e_b = (1 / 10.000) * 100 = % 0,01
Perçin için e_b = (1 – 9) * 100 = % 10

MUTLAK HATA
(Absolute Error)

Mutlak hata = | Bağıl Hata |

* Gerçek değer ile hesaplanan değer biliniyorsa;

$$\text{Mutlak hata} = \left| \frac{\text{Gerçek değer} - \text{Hesaplanan değer}}{\text{Gerçek değer}} \right|$$

Hatanın negatif olarak anılması bazıları tarafından hoş karşılanmaz.
Bu sebeple mutlak değeri alınarak kullanılır.

Ör: $f(x) = x^2 - 3x$ denklemi veriliyor. $x = 2$ değerini bu fonksiyona koyup hesaplayan biri sonucu 10 buluyor. Bu işlemdeki mutlak hata nedir?

gerçek değer $\Rightarrow f(2) = 4 - 6 = -2$

hesaplanan değer $\Rightarrow f(2) = 10$

$$\text{Mutlak hata} = \left| \frac{-2 - 10}{-2} \right| = \underline{\underline{6}}$$

YUVARLAMA HATASI

(Rounding Error)

27,35254316 ≈ 27,35

virgülden sonra 2 basamak istiyoruz.

27,35

bu basamaktan önceki sayı 5 ten küçükse 5 değişmez aynen kalır

27,36

bu basamaktan önceki sayı 5 e eşit ve büyükse yuvarlanmak istenen basamak 1 artar.

Yuvarlatma hatası = gerçek değer – yuvarlama sonucu değer = 27,35254316 – 27,35 = 0,00254316

Soru : Verilen sayılar için virgülden sonra 3 basamak olarak yuvarlatma hatasını hesaplayınız.

$1,352471 \cong$ 1,352 Yuvarlama hatası = 0,000471

$2,0235846 \cong$ 2,024 Yuvarlama hatası = -0,0004154

$35,1761203 \cong$ 35,176 Yuvarlama hatası = 0,0001203

Kaynaklar

(www.buders.com)
Ders kitapları